* Introducción al análisis:

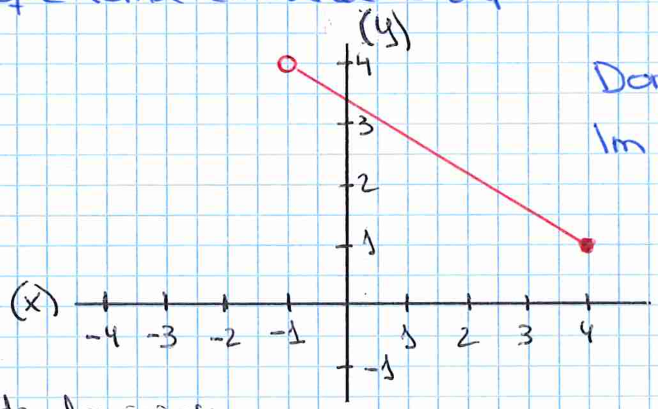
- Concepto de función:

Una función es una relación entre dos magnitudes de manera que a cada valor de la primera (x) le corresponde un único valor de la segunda (y).

- Elementos de la función:

Dominio de una función es el conjunto de valores de la variable independiente (x) para los cuales la función está definida.

Imagen o recorrido de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente (y)



$\text{Dom } f(x) = (-1, 4]$

$\text{Im } f(x) = [1, 4)$

- Cálculo de dominios:

DOMINIO			
FUNCIÓN POLINÓMICA EXPONENCIAL		**D = ℜ**	La función existe para todos los valores de x
FUNCIÓN RACIONAL		**D** = ℜ -{valores de x que anulan el denominador}	Igualamos a 0 el denominador, resolvemos la ecuación y quitamos esos valores del dominio
FUNCIÓN IRRACIONAL	índice par	**D** = RADICANDO ≥ 0	No existe la raíz de nº negativos si el índice es par, por lo que el radicando debe ser ≥ 0. Se resuelve la inecuación y el resultado es el dominio
	índice impar	**D** = dominio del radicando	Si la raíz es de índice impar, no influye en el dominio
FUNCIÓN LOGARÍTMICA		**D** = LOGARITMO > 0	Como no existen los logaritmos de nº negativos ni de 0, la función que está dentro del logaritmo debe ser > 0. Se resuelve la inecuación y el resultado es el dominio.

- Composición de funciones:

Si tenemos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de modo que el dominio de la segunda este incluido en la imagen de la primera, se puede definir una función que asocie cada elemento del dominio de $f(x)$ el valor de $g(f(x))$.

Se escribe $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ y se lee f compuesto con g.

La composición de funciones no es conmutativa.

$$\xrightarrow{x} \boxed{f} \xrightarrow{f(x)} \boxed{g} \longrightarrow g(f(x)) \text{ o } (g \circ f)$$

Ejemplo: $f(x) = e^x$ $\qquad g(x) = L(x-1)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(L(x-1)) = e^{L(x-1)} = x-1$$

¿Cual es el dominio de $f(g(x))$?

$(1, +\infty)$

El dominio de una función compuesta esta restringido por el dominio de la función con la que partimos.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \to$ El dominio esta restringido por $g(x)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \to$ El dominio esta restringido por $f(x)$

*Funciones reales de variable real:

-Funciones polinómicas:

Su dominio es siempre $\mathbb{R}$ mientras que su imagen varía.

- Grado $\emptyset$: $y=K$ Funciones constantes (rectas)
- Grado 1: $y=ax+b$ con $a\neq\emptyset$ son rectas en el plano.
- Grado 2: $y=ax+bx+c$ con $a\neq\emptyset$ son parabolas.

-Funciones racionales:

Son el cociente de dos polinomios que pertenecen a $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

El dominio de las funciones racionales son todos reales menos los que anulan el denominador. $\mathbb{R}-\{x: Q(x)=\emptyset\}$

-Funciones trigonométricas:

Son aquellas construidas a partir de $\sin x$, $\cos x$ y $\tan x$.

- Las funciones $\sin x$ y $\cos x$ son periodicas de periodo 2π.

Su dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen esta acotada por $[-1,+1]$

- Las funciones $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ son periodicas de periodo π.

Su dominio no incluye los numeros que anulan el denominador, es decir, los puntos $\{(2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\}$. Su rango es $\mathbb{R}$.

- Secante: $\sec x=\frac{1}{\cos x}$
- Cosecante: $\csc x=\frac{1}{\sin x}$
- Cotangente: $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$

No estan definidas cuando el denominador se anulan.

-Relaciones trigonometricas fundamentales:

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

$$\sin(x+y)=\sin(x)\cdot\cos(y)+\cos(x)\cdot\sin(y)$$

$$\cos(x+y)=\cos(x)\cdot\cos(y)+\sin(x)\cdot\sin(y)$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\cdot\tan(y)}$$

$$\sin^2(x)=\frac{1}{2}(1-\cos(2x))$$

$$\cos^2(x)=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

-Funciones exponenciales:

- Son funciones con la forma $f(x) = a^x$, donde "a" pertenece a los numeros reales positivos ($\mathbb{R}^+$).
- Es función creciente si $a > 1$ y decreciente si $\emptyset < a < 1$
- Su dominio es $\mathbb{R}$ y su rango es $\mathbb{R}^+$ siempre que $a \neq 1$, en cuyo caso el rango es 1.

-Propiedades de las exponenciales:

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

$(ab)^x = a^x \cdot b^x$

$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

-Funciones hiperbolicas:

A partir de la funcion exponencial con $a=e$, $f(x) = e^x$:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

-Propiedades de las funciones hiperbolicas:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\sinh(x+y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \cosh(x) \cdot \sinh(y)$$

$$\cosh(x+y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(x) \cdot \sinh(y)$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 - \tanh(x) \cdot \tanh(y)}$$

-Funciones a trozos:

Son aquellas en las que su expresión se define de forma distinta dependiendo del valor que toma la variable independiente x.

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq \emptyset \\ -f(x), & \text{si } f(x) < \emptyset \end{cases}$$

-Funciones logarítmicas: $f(x) = \log_a x$

Su dominio es $\mathbb{R}^+$ y su rango es $\mathbb{R}$

Cuando $a>1$ es una función creciente, y es decreciente si $a<1$.

-Propiedades de los logaritmos:

$\log_a 1 = \emptyset$

$\log_a a = 1$

- Para todos los reales positivos $\mathbb{R}^+$

$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a (x^y) = y \log_a x$

$y \neq \emptyset \rightarrow \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

-Límites:

El límite de una función en un punto A es el valor de L al que se aproxima la función, es decir, a medida que x se aproxima a A, obtenemos un valor en y que es L.

A medida que nos acercamos a x=A, las correspondientes imágenes se aproximan al valor del límite L.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \text{ si } \forall \varepsilon > \emptyset, \exists \delta > \emptyset \,/\, \text{si } |x-a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

-Límites laterales:

- Teorema unicidad del límite: si existe el límite de una función en un punto, este es único.

Casos:

- $\frac{K}{\emptyset}$ -Se calculan los límites laterales, si ambos coinciden, el límite existe. En caso contrario, el límite no existe.

- $\frac{\emptyset}{\emptyset}$ cociente de polinomios:
  -Se factoriza y se simplifica, despues se resuelve.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{1-x} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{\emptyset}{\emptyset} \quad \frac{x^2-1}{1-x} = \frac{(x-1)(x+1)}{1-x} = \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \frac{x+1}{-1}$$

multiplico por −1.

Sustituyo en el resultado el valor y calculo.

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{1+1}{-1} = \boxed{-2}$$

- $\frac{\emptyset}{\emptyset}$ diferencia de raíces cuadradas:
  -Se multiplica y se divide por el conjugado.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{\emptyset}{\emptyset}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

• $\frac{\infty}{\infty}$ Regla de Leibniz:

-Se divide el numerador y el denominador de la funcion entre la mayor potencia de x

- Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, el resultado es $\pm\infty$

- Si el grado del denominador es mayor que el grado del numerador, el resultado es $\emptyset$.

- Si el grado del numerador y del denominador es el mismo, el resultado es el cociente de los coeficientes de la x de mayor grado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x+1}{1+2x} = \frac{\infty+\infty+1}{1+\infty} = \frac{\infty}{\infty} \simeq \frac{3x^2}{2x} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{x^2+x+1} = \frac{\infty}{\infty} \simeq \frac{3x}{x^2} = \boxed{\emptyset}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+1}{5x^2-2x} = \frac{\infty}{\infty} \simeq \frac{2x^2}{5x^2} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

• $\infty - \infty$:

-En los polinomios, el limites es $+\infty$ o $-\infty$ segun el signo del termino de mayor grado.

$$\lim_{x\to\infty} x^3-2x-1 = \boxed{+\infty}$$

- En la diferencia de funciones racionales: se hacen las operaciones algebraicas (la resta de fracciones) y se calcula el resultado.

- En la diferencia de raices cuadradas: se multiplica y se divide por el conjugado y se obtiene una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

• $0 \cdot \infty$: Se transforma mediante operaciones algebraicas en otra indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) = \infty \cdot 0$$

$$x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) = x^2 \left(\frac{2x-1}{x^2-x} \right) = \frac{2x^3-x^2}{x^2-x} = \boxed{\infty}$$

• Número e:

El número e puede definirse por medio del siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

• Caso 1^∞ Se calcula aplicando esta formula:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to x_0} (f(x)-1) \cdot g(x)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{x-1} = e^{\lim_{x \to \infty} \left(\left(\frac{x+2}{x} \right) - 1 \right) \cdot (x-1)} = e^{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2-x}{x} \right) (x-1)} =$$

$$e^{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x} \right) \cdot (x-1)} = e^{\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x-2}{x} \right)} = \boxed{e^2}$$

- Infinitésimos:

Se dice que $f(x)$ es un infinitésimo en $x=a$, si se verifica que $\lim_{x \to a} f(x) = \emptyset$

Dos infinitésimos son equivalentes si el límite de su cociente es 1.

Cuando dos infinitésimos son equivalentes, y uno de ellos aparece multiplicando o dividiendo en un límite, se puede sustituir por su equivalente y el límite no varía.

Cuando $x \to \emptyset$	$x \sim \operatorname{sen} x$ $x \sim \operatorname{arcsen} x$	$x \sim \operatorname{tg} x$ $x \sim \operatorname{arctg} x$	$x \sim \ln(1+x)$ $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$x \sim e^x - 1$
Cuando $x \to 1$	$x-1 \sim \ln x$			

- Continuidad:

Una función es continua en un punto si existe el límite en ese punto y coincide con el valor de la función en dicho punto, es decir:

$$f(x) \text{ continua en } a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Para ello se han de verificar las siguientes condiciones:

- Existe límite de la función en ese punto (existen los laterales y son iguales y finitos).
- La función esta definida en ese punto.
- El valor de la función y el límite de la función en ese punto son iguales.

Vulgarmente, se podría decir, que una funcion continua se puede dibujar sin levantar la mano del papel.

- Discontinuidad:

Una función es discontinua en un punto cuando no se cumple alguna de las condiciones detalladas para la continuidad.

Tipos de discontinuidad:

- Discontinuidad evitable: cuando existe el límite en un punto pero no coincide con el valor de la función en él.

- Discontinuidad inevitable o esencial: cuando existen los límites laterales en un punto y son distintos o infinitos. A la resta de ambos valores se le llama salto de función. La discontinuidad inevitable puede ser de salto finito o infinito.

Discontinuidad salto finito $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to a} f(x) = K \\ \lim_{x \to a} f(x) = R \end{array} \right\} \rightarrow$ Salto $= K - R$

Discontinuidad salto infinito $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \end{array} \right\} \rightarrow$ Salto $= \infty$

Propiedades de las funciones continuas:

Sean f y g continuas en un punto a de su dominio, entonces son continuas:

$f \pm g$ suma

$f \cdot g$ multiplicación

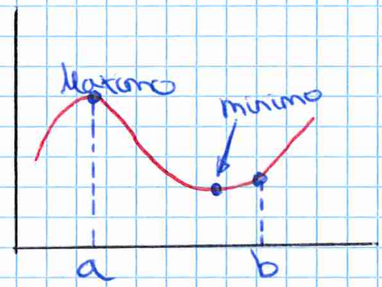
$\frac{f}{g}$, siempre que $g(a) \neq \emptyset$ división

$|f|$ Modulo o valor absoluto.

Kf, para todo $K \in \mathbb{R}$ Multiplicado por una constante perteneciente $\mathbb{R}$

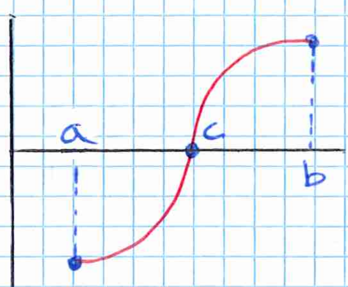
- Teorema de Weierstrass de valores extremos:

Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, tiene maximo y minimo en dicho intervalo.



- Teorema de Bolzano:

Si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ y toma valores de signo opuesto en los extremos, entonces existe al menos un punto c del intervalo en el que $f(c) = \emptyset$.



*Derivación de funciones:

-Derivada en un punto:

Se dice que una función es derivable en un punto a cuando existe:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

A este límite se le denomina derivada de f en a y se denota por $f'(a)$.

-Derivada para todo x:

Se llama función derivada de $f(x)$ a la función $f'(x)$ dada por:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Siempre que el límite exista.

Ejemplo, calcular la derivada de la función en un punto aplicando la definición:

$f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h} = \frac{\sqrt{1+0}-\sqrt{1}}{0} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

INDETERMINACION.

$$\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}}{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}} = \frac{(\sqrt{1+h})^2-(\sqrt{1})^2}{h(\sqrt{1+h}+\sqrt{1})} =$$

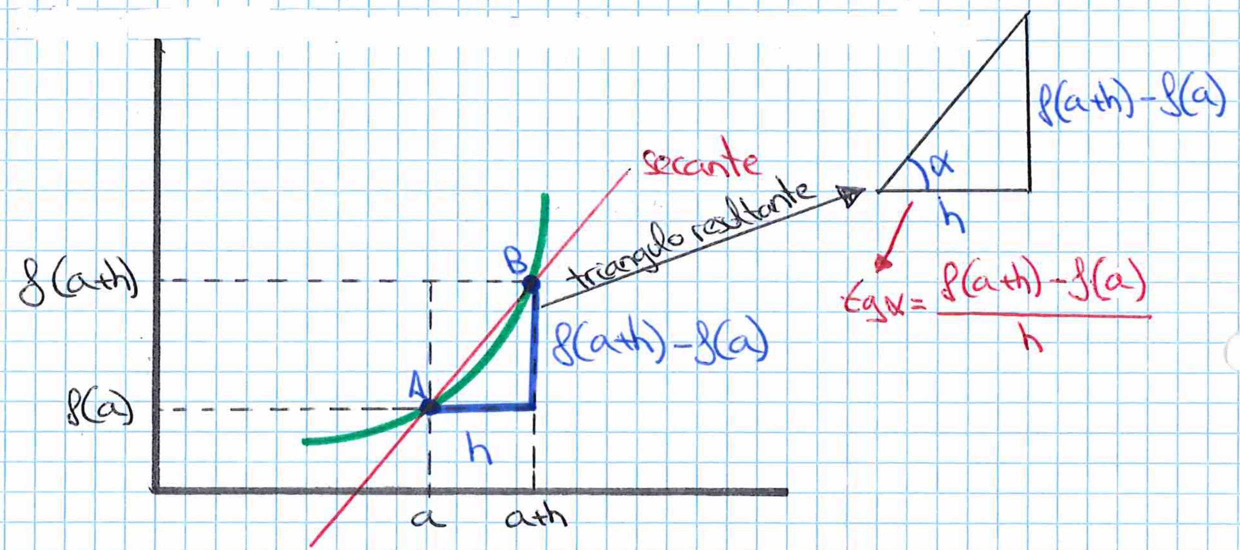
$$= \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+\sqrt{1})} = \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+\sqrt{1})} = \frac{1}{\sqrt{1+h}+\sqrt{1}}$$ = sustituimos h por el límite. $$= \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

- Interpretación geometrica de la derivada:

Desde el punto de vista geométrico, para cada valor de $h \neq \emptyset$, el número $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mide la pendiente de la recta que une los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(a+h, f(a+h))$

Pueden ocurrir dos casos:

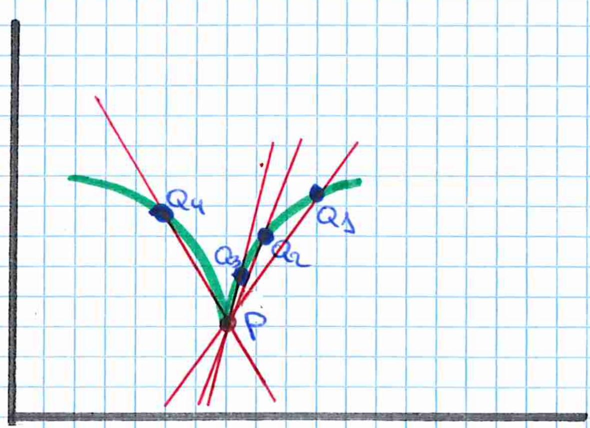
1- Las rectas que unen P con los puntos Q se aproximan a una recta t que, intuitivamente es la tangente de P.



- Lanzando la recta secante que une los puntos A y B, logramos obtener un triangulo rectangulo, con lo que para hallar el valor del angulo solo tenemos que hallar la $tg(\alpha)$.
- Cuando vamos acercando el punto B a A, h va tendiendo a $\emptyset$ y la $tg(\alpha)$ se convierte en:

$$tg(\alpha) = \lim_{h \to \emptyset} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

2- Las rectas PQ no se aproximan a ninguna recta.



- A medida que Q se fuera acercando al punto P, intuitivamente no se vería la $tg(\alpha)$, porque iría dando saltos.

- Derivada n-esima:

Consiste en derivar una función $f(x)$ n veces.

Ejemplo: Calcular la n-esima derivada de:

$y = sen(x)$

$y' = cos(x)$

$y'' = -sen(x)$

$y''' = -cos(x)$

$y^{4)} = sen(x)$ → A partir de aquí se repite, con lo cual, podemos tener una ley de recurrencia donde podemos calcular la derivada n-esima de esta función.

$$y^{n)} = sen\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

- Polinomios de Taylor:

Sea f una función con derivadas de orden n en el punto $x=c$, entonces existe un único polinomio $P(x)$ de grado menor o igual que n que satisface:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n$$

- Formula de Lagrange del resto:

Sea f una función n+1 veces derivable en un intervalo abierto I y con derivadas continuas hasta orden n.

$$f(x) = f(c) + f'(c)\cdot(x-c) + \frac{f''(c)}{2}\cdot(x-c) \ldots + \frac{f^n(c)}{n!}\cdot(x-c)^n + R_n(x)$$

donde $R_n(x)$:

Valor entre c y x.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n-1)!}\cdot(x-c)^{n-1}$$

Resto de Lagrange.

* Tablas de derivadas:

OPERACIONES CON FUNCIONES

CONSTANTE POR FUNCION	$y=K\cdot f$	$y'=K\cdot f'$
SUMA DE FUNCIONES	$y=f\pm g$	$y'=f'\pm g'$
PRODUCTO DE FUNCIONES	$y=f\cdot g$	$y'=f'\cdot g+f\cdot g'$
COCIENTE DE FUNCIONES	$y=\dfrac{f}{g}$	$y'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$
COMPOSICION DE FUNCIONES	$y=f\circ g$	$y'=f'(g)\cdot g'$

FUNCIONES POTENCIALES (CONSTANTE EN EL EXPONENTE)

	SIMPLES		COMPUESTAS	
CONSTANTE	$y=K$	$y'=\emptyset$		
IDENTIDAD	$y=x$	$y'=1$		
INVERSA	$y=\dfrac{1}{x}$	$y'=\dfrac{-1}{x}$	$y=\dfrac{1}{f}$	$y'=\dfrac{-f'}{f^2}$
POTENCIA	$y=x^n$	$y'=n\cdot x^{n-1}$	$y=f^n$	$y'=n\cdot f^{n-1}\cdot f'$
RAIZ	$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y=\sqrt[n]{f}$	$y'=\dfrac{f'}{n\cdot\sqrt[n]{f^{n-1}}}$

FUNCIONES EXPONENCIALES (CONSTANTE EN LA BASE)

SIMPES		COMPUESTAS	
$y=a^x$	$y'=a^x\cdot La$	$y=a^f$	$y'=a^f\cdot La\cdot f'$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^f$	$y'=e^f\cdot f'$
FUNCION ELEVADA A FUNCION		$y=f^g$	$y'=g\cdot f^{g-1}\cdot f'+f^g\cdot Lf\cdot g'$

FUNCIONES LOGARÍTMICAS:

SIMPLES		COMPUESTAS	
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$y = \log_a f$	$y' = \frac{1}{f} \cdot \log_a e \cdot f'$
$y = L x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = L f$	$y' = \frac{1}{f} \cdot f' = \frac{f'}{f}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:

SIMPLES	
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\operatorname{cosec}^2 x = -1 - \operatorname{cotg}^2 x = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
COMPUESTAS	
$y = \operatorname{sen} f$	$y' = \cos f \cdot f'$
$y = \cos f$	$y' = -\operatorname{sen} f \cdot f'$
$y = \operatorname{tg} f$	$y' = \sec^2 f \cdot f' = (1 + \operatorname{tg}^2 f) \cdot f' = \frac{f'}{\cos^2 f}$
$y = \operatorname{cotg} f$	$y' = -\operatorname{cosec}^2 f \cdot f' = (-1 - \operatorname{cotg}^2 f) \cdot f' = \frac{-f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$y = \operatorname{arcsen} f$	$y' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$y = \arccos f$	$y' = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$y = \operatorname{arctg} f$	$y' = \frac{f'}{1+f^2}$

Tabla de derivadas

(Observación: a, n, k son constantes; f, g son funciones)

» Operaciones con funciones:

CONSTANTE POR FUNCIÓN:	$y = k \cdot f$	$\Rightarrow$	$y' = k \cdot f'$
SUMA DE FUNCIONES:	$y = f \pm g$	$\Rightarrow$	$y' = f' \pm g'$
PRODUCTO DE FUNCIONES:	$y = f \cdot g$	$\Rightarrow$	$y' = f' \cdot g + f \cdot g'$
COCIENTE DE FUNCIONES:	$y = f / g$	$\Rightarrow$	$y' = (f' \cdot g - f \cdot g') / g^2$
COMPOSICIÓN DE FUNCIONES: (REGLA DE LA CADENA)	$y = f \circ g$	$\Rightarrow$	$y' = f'(g) \cdot g'$

» Funciones potenciales (constante en el exponente):

	Simples	**Compuestas**
CONSTANTE:	$y = k \Rightarrow y' = 0$	
IDENTIDAD:	$y = x \Rightarrow y' = 1$	
INVERSA:	$y = 1/x \Rightarrow y' = -1/x^2$	$y = 1/f \Rightarrow y' = -f'/f^2$
POTENCIA:	$y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = f^n \Rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
RAÍZ:	$y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f} \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$

» Funciones exponenciales (constante en la base):

Simples	**Compuestas**
$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot La$	$y = a^f \Rightarrow y' = a^f \cdot La \cdot f'$
$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$	$y = e^f \Rightarrow y' = e^f \cdot f'$

FUNCIÓN ELEVADA A FUNCIÓN: $y = f^g \Rightarrow y' = \underbrace{g \cdot f^{g-1} \cdot f'}_{\text{potencial}} + \underbrace{f^g \cdot Lf \cdot g'}_{\text{exponencial}}$

» Funciones logarítmicas:

Simples	**Compuestas**
$y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e$	$y = \log_a f \Rightarrow y' = \dfrac{1}{f} \cdot \log_a e \cdot f'$
$y = Lx \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$	$y = Lf \Rightarrow y' = \dfrac{1}{f} \cdot f' = \dfrac{f'}{f}$

» **Funciones trigonométricas:**

Simples	Compuestas
$y = senx \Rightarrow y' = \cos x$	$y = senf \Rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
$y = \cos x \Rightarrow y' = -senx$	$y = \cos f \Rightarrow y' = -senf \cdot f'$
$y = tgx \Rightarrow y' = \sec^2 x = 1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = tgf \Rightarrow y' = \sec^2 f \cdot f' = \left(1 + tg^2 f\right) \cdot f' = = f' / \cos^2 f$
$y = \cot gx \Rightarrow y' = -\cos ec^2 x = -1 - \cot g^2 x = \dfrac{-1}{sen^2 x}$	$y = \cot gf \Rightarrow y' = -\cos ec^2 f \cdot f' = = \left(-1 - \cot g^2 f\right) \cdot f' = -f' / sen^2 f$
$y = arcsenx \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = arcsenf \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$y = \arccos x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos f \Rightarrow y' = \dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$y = arctgx \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = arctgf \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{1+f^2}$

*Aplicaciones de las derivadas:

- Derivada lateral:
  - Si es continua en a y existe $\lim_{x \to a^-} f'(x) = b$
  - Si es continua en a y existe $\lim_{x \to a^+} f'(x) = b$

Es derivable si $f(x)$ es continua en a y los límites de las derivadas coinciden.

$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$$

No es derivable si $f(x)$ es continua en a y los límites de las derivadas no coinciden.

$$\lim_{x \to a^-} f'(x) \neq \lim_{x \to a^+} f'(x)$$

Ejemplo: Estudiar la continuidad y la derivabilidad de:

$$f(x) \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < \emptyset \\ x & \text{si } x \geq \emptyset \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \emptyset$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \emptyset$ Es continua

$f(0) = \emptyset$

Derivabilidad:

$$f'(x) \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < \emptyset \\ 1 & \text{si } x \geq \emptyset \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \emptyset$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$ No es derivable.

- Derivabilidad:

  Calculamos la derivada de la función:
  - Si existen las derivadas laterales y son distintas la función no es derivable y si son iguales puede ser derivable.
  - Si no existe alguna de las derivadas laterales o son iguales, hallamos el límite.

Si una función es derivable en "a", entonces es continua.

Derivable $\rightarrow$ Continua

Continua $\not\rightarrow$ Derivable (Puede o no ser derivable)

Ejemplo: Calcular los parametros para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$.

$$f(x)\begin{cases} ax^2+b & si\ x\leq 1 \\ \ln(x) & si\ x>1 \end{cases}$$

1º- Sacamos limites y los igualamos para que sea continua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\ln(1)=\emptyset \\ f(1)=a+b \end{array}\right\} a+b=\emptyset$$

2º- Estudiamos la derivabilidad y aplicamos limites.

$$\lim_{h\to\emptyset^-} \frac{f(1+h)-f(a)}{h}=\frac{a(1+h)^2+b-(a+b)}{h}=\frac{a(1+h)^2-a}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{a(1+h^2+2h)-a}{h}=\frac{a+ah^2+2ah-a}{h}=\frac{ah^2+2ah}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} ah+2a=\boxed{2a}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(a)}{h}=\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=\frac{\ln(1+\emptyset)-\ln(1)}{h}=\frac{\emptyset}{\emptyset}$$

aplicamos infinitésimos:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=\frac{h-\emptyset}{h}=\frac{h}{h}=1$$

$$\boxed{2a=1}$$

3º- Resolvemos la ecuación.

$$\begin{cases} a+b=\emptyset \\ 2a\ \ \ \ =1 \end{cases} \quad \boxed{a=\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{2}+b=\emptyset\rightarrow\boxed{b=-\frac{1}{2}}$$

4º- Sustituimos los parametros en la función.

$$f(x)\begin{cases} ax^2+b & si\ x\leq 1 \\ \ln(x) & si\ x>1 \end{cases} \rightarrow f(x)\begin{cases} \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2} & si\ x\leq 1 \\ \ln(x) & si\ x>1 \end{cases}$$

Ejemplo: Estudiar la continuidad y la derivabilidad de:

$$f(x)\begin{cases} x^2-5, & x<2 \\ \dfrac{x^2+4x}{2}, & x\geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2^2-5 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{2^2+4\cdot 2}{2} = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = \boxed{6}$$

No es una función continua, por lo tanto no es deribable.

$$f(x)\begin{cases} x^2+2, & x<2 \\ \dfrac{x^2+4x}{2}, & x\geq 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = 2^2+2 = 6 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{4+8}{2} = 6 \\ f(2) = \dfrac{4+8}{2} = 6 \end{array}\right\} \text{Es continua}$$

Calculamos las derivadas de la función:

$$y'(x^2+2) = 2x + \emptyset = 2x$$

$$y'\left(\frac{x^2+4x}{2}\right) = \frac{f'\cdot g - f\cdot g}{g^2} = \frac{(2x+4\cdot 2)-(x^2+4x\cdot \emptyset)}{4} = \frac{4x+8}{4} = \boxed{x+2}$$

$$f'(x)\begin{cases} 2x, & x<2 \\ x+2, & x\geq 2 \end{cases}$$

Calculamos los limites de la función derivada:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f'(x) = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 4 \end{array}\right\} \text{Es derivable}$$

*Regla de L'Hôpital:

Si f y g son funciones continuas y derivables, tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, o bien, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

La regla de L'Hôpital, se enuncia para resolver indeterminaciones $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\,\operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(0+\operatorname{sen} x)\cdot \operatorname{sen} x + (1-\cos x)\cdot \cos x}{2x} = \frac{0}{0}$$ seguimos intentándolo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos x - \cos^2 x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\cdot 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - (2\cos x\cdot(-\operatorname{sen} x))}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x\cdot\cos x - \operatorname{sen} x + 2\cos x\cdot \operatorname{sen} x}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

Propiedades de los logaritmos:

$Ln 1 = 0$	$Ln e = 1$	$Ln e^n = n$
$Ln(x\cdot y) = Ln(x) + Ln(y)$		$Ln\left(\frac{x}{y}\right) = Ln(x) - Ln(y)$
$Ln x^n = n Ln x$		

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{Lx}} = 0^{\frac{1}{L0^+}} = 0^{\frac{1}{-\infty}} = 0^0$$ INDETERMINACION

Ahora llamamos "A" a todo el límite de la función

$$LA = L \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{Lx}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{Lx}\cdot Lx = \lim_{x\to 0^+} \frac{Lx}{Lx} = 1 = Ln e$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{Lx}} = e}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x(x^2-x-2)}{2x^2-8x+8} = \frac{e^2\cdot(4-2-2)}{8-16+8} = \frac{0}{0}$$ INDETERMINACIÓN.

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x(x^2-x-2)+e^x(2x-1)}{4x-8} = \frac{e^2\cdot 3}{0} =$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{e^2\cdot 3}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{e^2\cdot 3}{0^+} = +\infty$$

No existe límite.

*Monotonía y extremos relativos:

Teorema: Si una función es derivable en a, entonces:

- Si $f'(a) > 0$, f es creciente en a.
- Si $f'(a) < 0$, f es decreciente en a.
- Si $f'(a) = 0$, f puede presentar un máximo y un mínimo relativo en a.

- Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$
Sabemos que en $x=0$ su recta tangente es horizontal.
Que tiene un extremo relativo en $x=-2$ y que pasa por $P(1,0)$.
Hallar a, b y c, estudiar extremos y monotonía.

Como en $x=0$ su tangente es horizontal, su pendiente es 0, por lo tanto, su derivada en ese punto es 0

$f'(x) = 4x^3 + a\cdot 3x^2 + b\cdot 2x + c$

$f'(0) = 0 + 0 + 0 + c = 0$

$c = 0$

Tiene un estremo relativo en $x-2$, entonces su derivada es 0.

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = 0$

$f'(-2) = -32 + 12a - 4b + 0 = 0$ → Tenemos que hallar otra ecuación para poder resolverla.

Como pasa por el punto $(1,0)$ debe cumplir.

$f(1) = 1 + a + b + 0 + 7 = 0$

$f(1) = a + b = -8$ → Con esta otra ecuación y la anterior, ya podemos resolver el problema.

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = x^4 - 8x^2 + 7 \\ f'(x) = 4x^3 - 16x \end{array}}$$

$$\begin{cases} 12a - 4b = 32 \\ a + b = -8 \end{cases}$$

$a = -8 - b$

$12(-8-b) - 4b = 32$

$-96 - 12b - 4b = 32$

$-16b = 128$

$\boxed{b = -8}$

$a = -8 - (-8)$

$a = -8 + 8$

$\boxed{a = 0}$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = -8 \\ c = 0 \end{array}}$$

Ahora estudiamos los extremos y monotonia

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ $\qquad$ $f'(x) = 4x^3 - 16x$

Para estudiar la monotonia tenemos que estudiar el signo de la primera derivada.
Para ver el signo, igualamos la función a 0 y sacamos donde se anula

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x\,(x^2-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ahora para ver si son maximos o minimos estudiamos la segunda derivada.

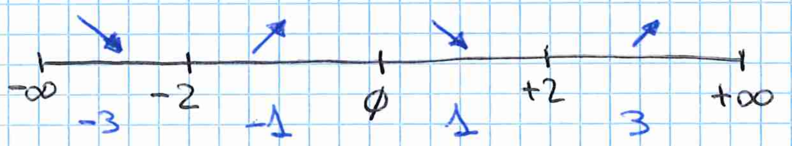
$f''(x) = 12x^2 - 16$

$f''(0) = 0 - 16 = -16$ $\qquad$ • Si es menor que 0 es un maximo.
$f''(2) = 48 - 16 = 32$ $\qquad$ • Si es mayor que 0 es un minimo.
$f''(-2) = 48 - 16 = 32$

Calculamos los puntos de la función sustituyendo los valores en la función.

$f(0) = 0 - 0 + 7 = 7$ $\qquad$ Maximo en el punto $(0,7)$
$f(2) = 16 - 32 + 7 = -9$ $\qquad$ Minimo en el punto $(2,-9)$
$f(-2) = 16 - 32 + 7 = -9$ $\qquad$ Minimo en el punto $(-2,-9)$

Para calcular la monotonia tenemos que colocar todo el intervalo y los puntos donde hay maximos y minimos, sustituimos valores intermedios en la primera derivada.



- $f'(-3) = 4\cdot(-3)^3 - 16(-3) = -60$
decreciente
- $f'(-1) = 4\cdot(-1)^3 - 16(-1) = 12$
creciente
- $f'(1) = 4\cdot 1^3 - 16\cdot 1 = -12$
decreciente
- $f'(3) = 4\cdot 3^3 - 16\cdot 3 = 60$
creciente

En resumen:

• Para calcular los extremos, primera derivada igual a 0 y los numeros que anulan la función.
Luego en la segunda derivada, sustituimos los extremos y si da $f''(x) < 0 \to$ Maximo
$f''(x) > 0 \to$ Minimo

*Concavidad:

- Concava: Si la curva está por encima de la tangente en el entorno del punto a. $f''(a) > 0$

- Convexa: Si la curva está por debajo de la tangente en el entorno del punto a. $f''(a) < 0$

- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $P(a, f(a))$ es mínimo relativo.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $P(a, f(a))$ es maximo relativo.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^4+3}{x} \qquad \text{Dominio} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Extremos relativos, compruebo en $f'(x)$ donde se anula.

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot x - (x^4+3)\cdot 1}{x^2} = \frac{4x^4 - x^4 - 3}{x^2} = \frac{3x^4-3}{x^2}$$

Buscamos donde se anula:

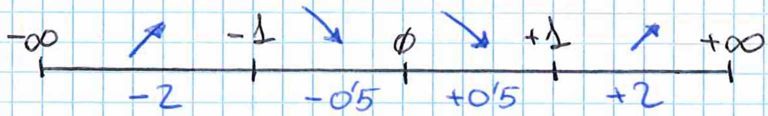
$$\frac{3x^4-3}{x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

Ya tenemos los puntos críticos (1 y -1) y buscamos si son máximos o mínimos, para ello sustituimos en la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{12x^3 \cdot x^2 - (3x^4-3)\cdot 2x}{x^4} = \frac{12x^5 - 6x^5 + 6x}{x^4} = \frac{6x^5+6x}{x^4} = \frac{6x^4+6}{x^3}$$

$$f''(-1) = \frac{6+6}{-1} = -12 < 0 \qquad f(-1) = \frac{1+3}{-1} = -4 \qquad (-1, -4) \text{ maximo.}$$

$$f''(1) = \frac{6+6}{1} = 12 > 0 \qquad f(1) = \frac{1+3}{1} = 4 \qquad (1, 4) \text{ minimo.}$$



$$f'(-2) = \frac{3\cdot 16 - 3}{4} = 11'25 \text{ creciente}$$

$$f'(-0'5) = \frac{(1/16)\cdot 3 - 3}{0'25} = -11,25 \text{ decreciente}$$

$$f'(0'5) = \frac{(1/16)\cdot 3 - 3}{1/4} = -11,25 \text{ decreciente}$$

$$f'(2) = \frac{3\cdot 16 - 3}{4} = 11,25 \text{ creciente}$$

Ejemplo: Calcular extremos relativos

$f(x) = x^6$ $\quad f'(x) = 6x^5$ Se anula en el punto $\emptyset$

$f''(x) = 30x^4$

$f''(0) = \emptyset$ como el resultado es $\emptyset$, seguimos derivando hasta que de distinto de $\emptyset$

$f'''(x) = 120x^3 \quad f'''(0) = \emptyset$

$f^{4)}(x) = 360x^2 \quad f^{4)}(\emptyset) = \emptyset$

$f^{5)}(x) = 720x \quad f^{5)}(\emptyset) = \emptyset$

$f^{6)}(x) = 720 \quad f^{6)}(\emptyset) = 720 > \emptyset$ por lo tanto es un mínimo

$f(0) = \emptyset \quad (\emptyset, \emptyset)$

Calcular extremos relativos:

$f(x) = 3x^3 - 18x^2 + 36x - 24$

$f'(x) = 9x^2 - 36x + 36$

$9x^2 - 36x + 36 = \emptyset \qquad \dfrac{+36 \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 36}}{18} = \dfrac{36}{18} = \boxed{2}$

$f''(x) = 18x - 36$

$f''(2) = 18 \cdot 2 - 36 = \emptyset$

$f'''(x) = 18$

$f'''(2) = 18 > \emptyset \qquad f(2) = 24 - 72 + 72 - 24 = \emptyset$

Por lo tanto en punto $(2, \emptyset)$ no es un extremo relativo, porque la primera derivada no nula es de orden impar, y para que presente un extremo relativo debe ser diferente de $\emptyset$ en una derivada par.

Norma general:

Si $f'(a) = \emptyset$; $f''(a) = \emptyset$; ... $f^k(a) \neq \emptyset$

- Si K es par, entonces $\begin{cases} f^k(a) < \emptyset \rightarrow f(x) \text{ tiene un máximo en } a. \\ f^k(a) > \emptyset \rightarrow f(x) \text{ tiene un mínimo en } a. \end{cases}$

- Si K es impar, entonces en $x = a$ no ha extremo.

* Estudio y representación gráfica de funciones de una variable

1. Dominio de la función: conjunto de números reales para los cuales existe imagen de la función.

DOMINIO			
FUNCIÓN POLINÓMICA EXPONENCIAL		$D = \mathbb{R}$	La función existe para todos los valores de x
FUNCIÓN RACIONAL		$D = \mathbb{R}$ -{valores de x que anulan el denominador}	Igualamos a 0 el denominador, resolvemos la ecuación y quitamos esos valores del dominio
FUNCIÓN IRRACIONAL	índice par	D = RADICANDO ≥ 0	No existe la raíz de nº negativos si el índice es par, por lo que el radicando debe ser ≥ 0 Se resuelve la inecuación y el resultado es el dominio
	índice impar	D = dominio del radicando	Si la raíz es de índice impar, no influye en el dominio
FUNCIÓN LOGARÍTMICA		D = LOGARITMO>0	Como no existen los logaritmos de nº negativos ni de 0, la función que está dentro del logaritmo debe ser > 0 Se resuelve la inecuación y el resultado es el dominio.

2. Corte con los ejes:

- Eje de abscisas o eje OX

Si corta al eje de las x, entonces $y=\emptyset$, entonces resolveríamos $f(x)=\emptyset$

Puede ser que no corte en ninguno, que corte en uno o que corte en varios puntos.

- Eje de ordenadas o eje OY

Si corta en el eje de las y, entonces $x=\emptyset$, entonces sustituimos a x por $\emptyset$.

A lo sumo, solo podemos obtener un punto.

3. Signo de la función:

Si la grafica esta por encima del eje OX sera positiva y si esta por debajo sera negativa.

-Representamos la función sobre la recta real los puntos de discontinuidad y los puntos de corte con el eje OX. Despues analizamos el signo de la función en cada uno de los intervalos obtenidos de la recta real.

Ejemplo

$$f(x)\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases} \qquad f(1-x^2)$$

Igualamos la función a 0, porque se ve claro que es el punto de corte.

$1-x^2=0 \rightarrow 1=x^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\boxed{\pm 1}$ puntos de corte.

Ahora analizamos los intervalos dibujando una tabla y damos valores a x.

$-\infty$ ... -1	-1 ... 1	1 ... $+\infty$
$-$	$+$	$-$
-2	0	2

$x=-2 \rightarrow f(1-x^2)=-3$ negativo

$x=0 \rightarrow f(1-x^2)=1$ positivo

$x=+2 \rightarrow f(1-x^2)=-3$ negativo

Ahora lo escribimos:

$f(1-x^2)>0 \quad (-1,1)$

$f(1-x^2)<0 \quad (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

4. Periodicidad:

Decimos que una función es periodica cuando su forma se repite cada cierto intervalo llamado periodo.

Una función es periodica de periodo T si $f(x)=f(x+T)$

Ocurre en las funciones trigonométricas.

5. Simetría:

Una función es simétrica si al doblar su gráfica por el eje de simetría, esta se superpone.

Existen dos tipos de simetría:

- Simetría par: $f(x) = f(-x)$
- Simetría impar $f(-x) = -f(x)$

Ejemplo:

$f(x) = x^4 + 3x^2$

$f(x) = f(-x)$

$f(-x) = -x^4 + 3(-x)^2 = x^4 + 3x^2$ SIMETRÍA PAR

$f(x) = x^3 - 4x$

$f(-x) = -x^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x$ NO ES SIMETRÍA PAR

$-f(x) = -(x^3 - 4x) = -x^3 + 4x$

$f(-x) = -f(x) \rightarrow -x^3 + 4x = -x^3 + 4x$ ES SIMETRÍA IMPAR

6. Asíntotas:

Las asíntotas de una función son líneas a las que se acerca una función sin llegar a tocarlas.

- Asíntotas verticales: rectas donde $x = a$.
  Se miran en los puntos de discontinuidad.

  $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ Si dan un valor infinito hay que hacer los límites laterales y averiguar el signo.

  $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

- Asíntotas horizontales: rectas donde $y = K$
  Como mucho puede haber 2.

  $\lim_{x \to \infty} f(x) = K$ Si da un valor finito, es una asíntota horizontal.

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = K$ Si tiene A. Horizontal no tiene A. Oblicua.

- Asíntotas oblicuas: recta donde $y = mx + n$
  Hay que hallar m y n.

  $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ el resultado ha de ser diferente de $\emptyset$ o $\pm\infty$.

  $n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$

Ejemplo:

$f(x) = \frac{x^3+8}{x^2-4}$

1º calculamos el dominio

$x^2-4=\emptyset$

$x^2=4$

$x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$ $\quad (-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

Los puntos de discontinuidad son $(-2,2)$

Buscamos Asintota vertical:

$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4} = -3 \to$ No tiene asintota vertical.

$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \frac{16}{\emptyset} = \infty$

Hallamos los limites de 2^+ y 2^-

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \frac{+}{+} = +\infty$

$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \frac{+}{-} = -\infty$

Ahora buscamos asintotas horizontales.

$\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \frac{\infty}{\infty} =$ indeterminación

Utilizamos Leibniz: y el resultado es ∞, por lo que no tiene asintotas horizontales.

Buscamos asintotas oblicuas:

$m = \frac{x^3+8}{x^2-4} : \frac{x}{1} = \frac{x^3+8}{x^3-4x} \to m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+8}{x^3-4x} = \frac{\infty}{\infty}$

Utilizamos leibniz $= \frac{1}{1} = \boxed{1}$

$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+8}{x^2-4} - 1\cdot x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+8-x(x^2-4)}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+8-x^3+4x}{x^2-4}$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+8}{x^2-4} = \frac{\infty}{\infty} =$ Utilizando Leibniz $= \emptyset$

por lo tanto nuestra tangente oblicua es igual a:

$y = 1\cdot x + n = x + \emptyset$

$y = x$

7. Extremos:

Supongamos que $f'(a) = \emptyset$; $f''(a) = \emptyset$; ….. ; $f^{k-1)}(a) = \emptyset$; $f^{k)}(a) \neq 0$

Se verifica que:

Si K = PAR $\begin{cases} f^{k)}(a) > \emptyset \rightarrow f(x) \text{ tiene un mínimo en } a \\ f^{k)}(a) < \emptyset \rightarrow f(x) \text{ tiene un máximo en } a \end{cases}$

Si K = IMPAR, entonces en $x = a$ no hay extremo.

8. Monotonía:

Si $f'(a) > \emptyset$, f es creciente en a.

Si $f'(a) < \emptyset$, f es decreciente en a.

Si $f'(a) = \emptyset$, f puede presentar un máximo y un mínimo relativo en a.

Se mira en los puntos de discontinuidad y extremos relativos.

Ejemplo:

$f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2-9}$ 1º Hallamos el dominio:

$x^2 - 9 = \emptyset \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \boxed{\pm 3}$

$(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

2º Buscamos si tiene extremos, para ello sacamos la primera derivada e igualamos a $\emptyset$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-9)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{2x^3-18x-2x^3+6x}{(x^2-9)^2} = \frac{-12x}{(x-9)^2}$$

$$\frac{-12x}{(x^2-9)^2} = \emptyset \rightarrow -12x = \emptyset \cdot (x^2-9)^2 = \emptyset \rightarrow \boxed{x = \frac{\emptyset}{-12} = \emptyset}$$

Ahora realizamos la tabla con los extremos y los valores que no pertenecen al dominio:

$-\infty$ | -3 | $\emptyset$ | 3 | $+\infty$

$f'(-4)$ = ↗ | $f'(-1)$ = ↗ | $f'(1)$ = ↘ | $f'(4)$ = ↘

$$f'(-4) = \frac{-12(-4)}{(-4^2-9)^2} = \frac{48}{49} = 0'97$$

$$f'(-1) = \frac{-12(-1)}{(-1^2-9)^2} = \frac{12}{64} = 0'18$$

$$f'(1) = \frac{-12\cdot 1}{(-1^2-9)^2} = \frac{-12}{64} = -0'18$$

$$f'(4) = \frac{-12\cdot 4}{(4^2-9)^2} = \frac{-48}{49} = -0'97$$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, \emptyset)$

$f(x)$ es decreciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

9. Puntos de inflexión:

Verificar que $f''(a) = \emptyset$ y $f'''(a) \neq \emptyset$

Como regla general:

- Si $f''(a) = \emptyset$; $f'''(a) = \emptyset$; ...; $f^{k)}(a) \neq \emptyset$ entonces
  - Si K = PAR no podemos decir nada
  - Si K = IMPAR → Punto de inflexión.

Ejemplo:

$f(x) = x^3 + 2x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 2$

$f''(x) = 6x$

Igualamos a $\emptyset$ la segunda derivada:

$6x = \emptyset \rightarrow x = \frac{\emptyset}{6} = \boxed{\emptyset}$ → posible punto de inflexion

Hacemos la tercera derivada

$f'''(x) = 6$ → como es distinto de $\emptyset$, nuestro valor anterior es punto de inflexion.

Ahora sustituimos nuestro valor en la función:

$f(\emptyset) = 3 \cdot \emptyset^3 + 2 \cdot \emptyset + 1 = 1$

$\boxed{\text{Nuestro punto de inflexión es } (\emptyset, 1)}$

10. Curvatura:

- Concava: Si una curva está por encima de la tangente en un entorno del punto a.
  Si $f''(a) > \emptyset$, f es concava.

- Convexa: Si una curva esta por debajo de la tangente en un entorno del punto a.
  Si $f''(a) < \emptyset$, f es convexa

* Tipo de funciones:

- Polinómicas:
  - El dominio es todo R.
  - Si el grado de la función es mayor que 1, no existen asíntotas.
  - Tienen dos ramas infinitas en $-\infty$ y $+\infty$.
  - Imprescindible para la representación, el cálculo de puntos:
    - ✓ Corte con los ejes.
    - ✓ Máximos y mínimos y el estudio de la monotonía
    - ✓ Puntos de inflexión y la curvatura.

Ejemplo:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ 1. Su dominio es todo R.

2. Corte con los ejes:

Eje OX → $y = \emptyset$

$x^3 - 3x + 2 = \emptyset$ Hacemos ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
-2 & & -2 & 4 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & -1 & \\
\hline
 & 1 & -1 & \boxed{0} & \\
1 & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}
\quad \begin{array}{l} (x+2)(x^2-2x+1) \\ (x+2)(x-1)(x-1) \end{array}$$

$x = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

Puntos de corte en OX $= \boxed{\begin{cases} (-2,0) \\ (1,0) \end{cases}}$

Eje OY → $x = \emptyset$

$y = x^3 - 3x + 2 = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$

Puntos de corte en OY $= \boxed{(0,2)}$

3. Máximos y mínimos:

Primera derivada e igualamos a $\emptyset$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = \emptyset \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = \frac{3}{3} = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ posibles extremos

Realizamos segunda derivada para ver si es máximo o mínimo.

$f''(x) = 6x$

$$\boxed{\begin{array}{ll} f''(1) = 6 > \emptyset & \text{el punto } (1,\emptyset) \text{ es un mínimo} \\ f''(-1) = -6 < \emptyset & \text{el punto } (-1,4) \text{ es un máximo} \end{array}}$$

Para hallar los puntos sustituimos los valores en la función.

$f(1) = 1 - 3 + 2 = \emptyset$

$f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$

4. Monotonía: Comprobamos los extremos obtenidos solamente porque la función es continua.

$-\infty \nearrow -1 \searrow 1 \nearrow +\infty$

$f'(-2) \quad f'(0) \quad f'(2)$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(-2) = 12 - 3 = 9 > \emptyset \text{ creciente} \\ f'(0) = -3 < \emptyset \text{ decreciente} \\ f'(2) = 12 - 3 = 9 > \emptyset \text{ creciente} \end{array}}$$

5. Puntos de inflexión:

Segunda derivada igual a Ø

$f''(x) = 6x = \emptyset \rightarrow \boxed{x = \frac{\emptyset}{6} = \emptyset} \rightarrow$ Posible punto de inflexión.

Hacemos la tercera derivada y comprobamos que es distinta de Ø.

$f'''(x) = 6$

$f'''(\emptyset) = 6$ entonces como es distinta de Ø, sabemos que Ø es un punto de inflexión.

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2$ $\quad \boxed{(0,2)} \rightarrow$ Punto de inflexión.

6. Curvatura: Comprobamos el signo de la segunda derivada a cada lado del punto de inflexión $(x = \emptyset)$

$f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > \emptyset$ Concava de $(\emptyset, \infty)$

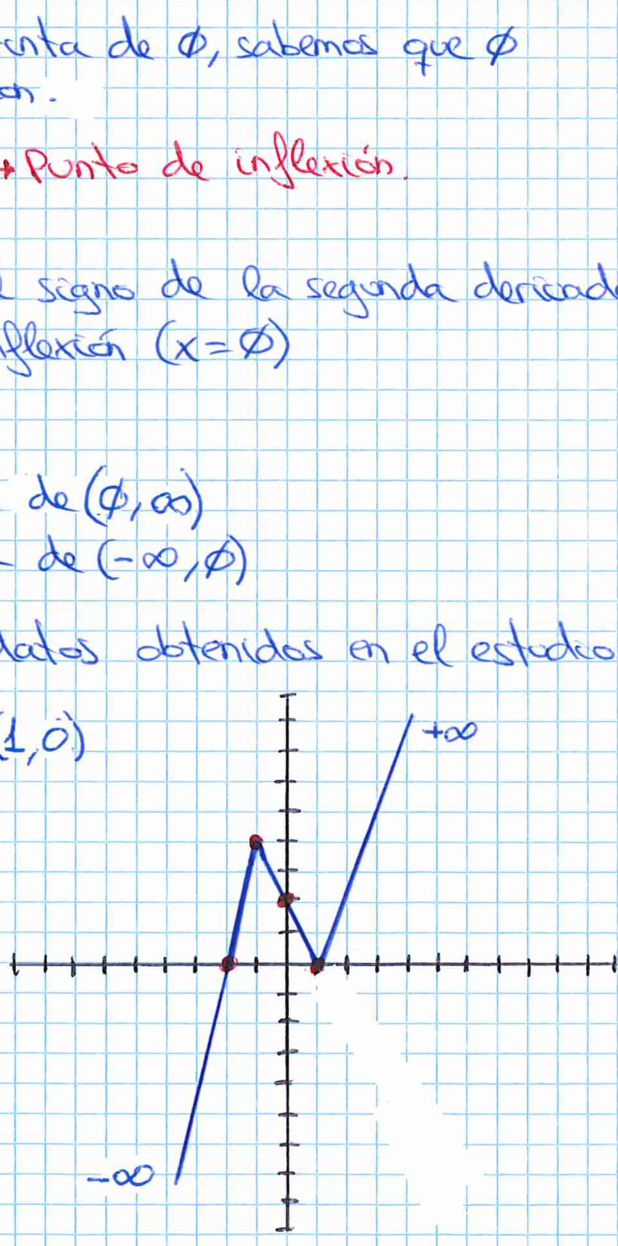
$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < \emptyset$ Convexa de $(-\infty, \emptyset)$

7. Graficamos: Usamos los datos obtenidos en el estudio:

- Puntos de corte OX: $(-2, \emptyset)$ y $(1, 0)$
- Puntos de corte OY: $(\emptyset, 2)$
- Máximo: $(-1, 4)$
- Mínimo: $(1, \emptyset)$
- Punto de inflexión: $(0, 2)$
- Monotonía:

$-\infty \quad -1 \quad \emptyset \quad +1 \quad +\infty$

$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$



- Racionales:
  - El dominio es todo $\mathbb{R}$ menos los puntos que anulan al denominador.
  - Simplificar en caso de tener raíces comunes.
  - No son periódicas.
  - Poseen asíntotas verticales en los puntos que anulan el denominador, excepto que también anulen al numerador.
  - Si posee asíntota horizontal, no posee asíntota oblicua y viceversa.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2-2x-1}{x-1}$$

1. Dominio:

$x-1 \neq \emptyset \rightarrow x \neq 1$

$\boxed{(-\infty, 1) \cup (1, \infty)}$

2. Corte con los ejes:

Corte OX:

$$\frac{x^2-2x-1}{x-1} = \emptyset \rightarrow x^2-2x-1 = 0 \cdot (x-1) = \emptyset$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \boxed{1 \pm \sqrt{2} \begin{cases} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} (1+\sqrt{2}, \emptyset) \\ (1-\sqrt{2}, \emptyset) \end{matrix}}$$

Corte YX:

$$y = \frac{0^2-2 \cdot 0-1}{0-1} = \frac{-1}{-1} = \boxed{1} \quad \boxed{(0, 1)}$$

3. Extremos:

$$f'(x) = \frac{(2x-2) \cdot (x-1) - (x^2-2x-1) \cdot (1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x+1}{(x-1)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2} = \emptyset \rightarrow x^2-2x+3 = \emptyset$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$ No tiene solución real.

No tenemos extremos.

4. Signo:

$-\infty$ ↗ 1 ↗ $+\infty$

$$f'(0) = \frac{0^2-2 \cdot \emptyset+3}{(0-1)^2} = \frac{3}{1} = 3 \text{ positivo}$$

$$f'(2) = \frac{4-4+3}{(2-1)^2} = \frac{3}{1} = 3 \text{ positivo}$$

$\boxed{\text{La función es creciente del } (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)}$

5. Asíntotas:

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\infty^+}\left(\frac{x^2-2x-1}{x-1}\right)=\frac{\infty}{\infty} \text{ Aplicamos Leibniz: } =\infty$$

$$\lim_{x\to\infty^-}\left(\frac{x^2-2x-1}{x-1}\right)=\frac{\infty}{-\infty}=-\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota vertical:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x-1}{x-1}=\frac{1-2-1}{1-1}=\frac{-}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x-1}{x-1}=\frac{1-2-1}{1-1}=\frac{-}{0^-}=+\infty$$

Asíntota vertical en $x=1$ $\begin{cases}\lim_{x\to1^+}=-\infty\\ \lim_{x\to1^-}=+\infty\end{cases}$

Asíntota oblicua:

$y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2-2x-1}{x-1}:\frac{x}{1}=\frac{x^2-2x-1}{x^2-x}=\boxed{1}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\frac{x^2-2x-1}{x-1}-\frac{x}{1}=\frac{x^2-2x-1-x(x-1)}{x-1}=$$

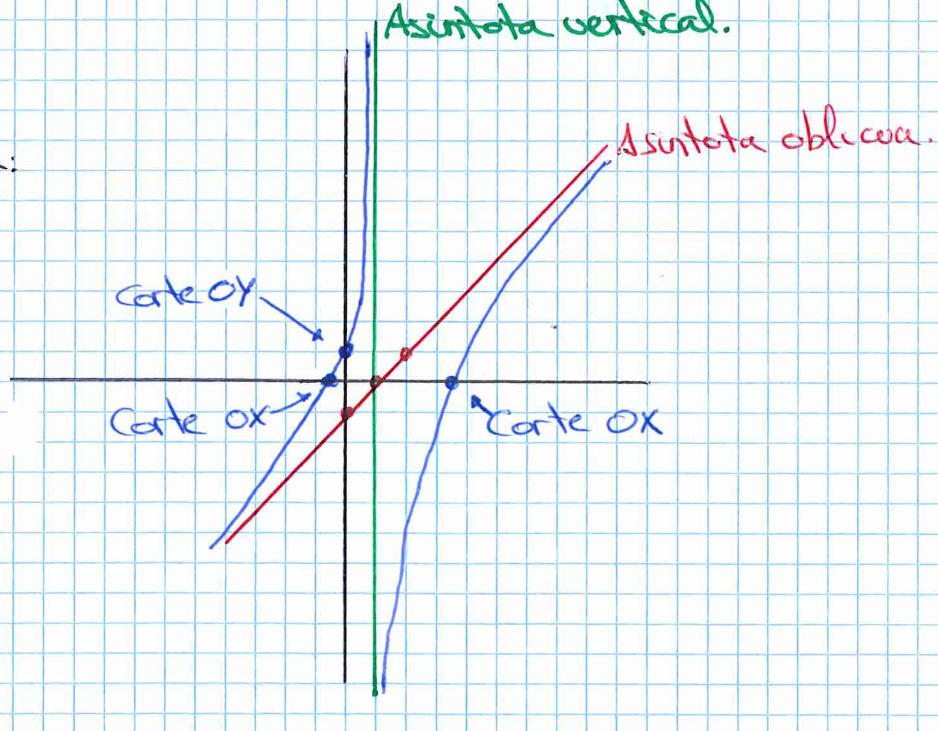
$$=\frac{x^2-2x-1-x^2+x}{x-1}=\frac{-x-1}{x-1}=\frac{\infty}{\infty} \text{ Aplicamos Leibniz} \to \frac{-1}{1}=\boxed{-1}$$

Asíntota oblicua en $x-1$

Graficamos:

-Asíntota oblicua:

x	y
0	-1
1	0
2	1



- Irracionales:

· Raices de indice impar su dominio es todo R.

· Raices de indice par no definidas para números negativos.

· Es frecuente que exista una asintota horizontal u oblicua en $+\infty$ y no en $-\infty$ o viceversa.

Ejemplo:

$f(x) = x + \sqrt{\frac{1}{x}}$

1. Dominio:

$x \neq \emptyset$

$x > \emptyset$ $\boxed{(\emptyset, \infty)}$

2. Corte con los ejes:

- Corte en YX: no existe. $0 + \sqrt{\frac{1}{0}}$ no tiene solución real.
- Corte en OX: no existe.

$x + \sqrt{\frac{1}{x}} = \emptyset \rightarrow -x = \sqrt{\frac{1}{x}} \rightarrow (-x)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 \rightarrow x^2 = \frac{1}{x} \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow$

$x = 1$ comprobamos el resultado.

$1 + \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 + 1 = 2$, por lo tanto el resultado es falso.

3. Signo de la función:

Como el dominio va de $(\emptyset$ a $\infty)$ damos un valor:

$f(7) = 7 + \sqrt{\frac{1}{7}} = 7{,}37 > \emptyset$ $\boxed{\text{signo positivo}}$

4. Asintotas:

- Vertical: $\lim_{x \to \emptyset^+} \left(x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right) = 0^+ + \sqrt{\frac{1}{0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\boxed{\text{Existe asintota vertical en } x = \emptyset}$

- Horizontal: $\lim_{x \to \infty} \left(x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right) = +\infty$ $\boxed{\text{No existe asintota horizontal.}}$

- Oblicua: $y = mx + n$

$m = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}{x}\right) = \frac{\infty}{\infty}$ IND Usamos leibniz:

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{1}\right) = \boxed{1}$

$n = \lim_{x \to \infty} \left(\left(x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right) - mx\right) = x + \sqrt{\frac{1}{x}} - x = \sqrt{\frac{1}{\infty}} = \boxed{\emptyset}$

$\boxed{\text{Asintota oblicua en } y = x}$

5. Extremos relativos:

Hacemos la primera derivada y la igualamos a $\emptyset$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{x}} \} g$$

$$g' = \frac{(0 \cdot x) - (1 \cdot 1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} : \frac{2\sqrt{\frac{1}{x}}}{1} = \frac{1}{x^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{x^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x^{-1}}}$$

$$y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^{-1} \cdot x^4}} = \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} = \emptyset$$

$$\frac{2\sqrt{x^3} - 1}{2\sqrt{x^3}} = \emptyset$$

$$2\sqrt{x^3} - 1 = \emptyset \cdot 2\sqrt{x^3} = \emptyset$$

$$2\sqrt{x^3} = 1 \rightarrow \sqrt{x^3} = +\frac{1}{2}$$

$$\left(\sqrt{x^3}\right)^2 = \left(+\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow x^3 = \frac{1}{4}$$

$\boxed{x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$ Posible extremo relativo.

Hacemos la segunda derivada para ver si es maximo o minimo.

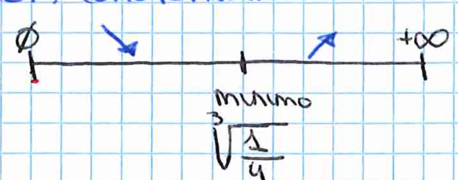
$$f''(x) = \frac{3}{4x^{5/2}}$$ sustituimos el valor del posible extremo en x.

$$\frac{3}{4 \cdot \sqrt[2]{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^5}} = 2{,}38 > \emptyset \qquad f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[2]{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}}$$

Tenemos un minimo en el punto

$$\left(\frac{3}{4\sqrt[2]{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^5}} ; \sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[2]{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}} \right)$$

6. Monotonia:



$$f'(0'6) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{0'6}} = -0'075 \text{ decreciente}$$

$$f'(0'7) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{0'7}} = 0'14 \text{ creciente}$$

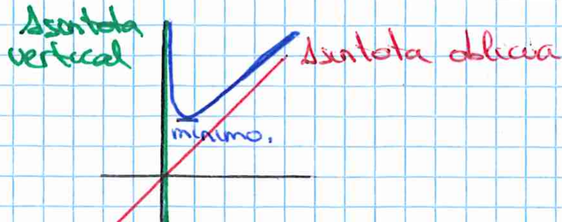
7. Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{3}{4x^{5/2}} = \emptyset \rightarrow 3 = \emptyset \cdot 4x^{5/4} = \emptyset$$ No existen puntos de inflexión.

8. Curvatura:

$$f''(1) = \frac{3}{4 \cdot \sqrt{1^5}} = \frac{3}{4} = 0'75 > \emptyset$$ es concava.

Dibujamos:



ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

1. **DOMINIO**

   Conjunto de números reales que tienen imagen, es decir, donde está definida la función.

2. **CORTE CON LOS EJES**

   Corte en **0X**: Igualamos la función a **0** y resolvemos la ecuación.

   Corte en **0Y**: Sustituimos **x** por **0** y resolvemos la ecuación. *(Máximo un resultado)*

3. **SIGNO**

   Si la grafica esta por encima de **0X** será **positiva** y si está por debajo será **negativa**. Sustituimos valores entre los **puntos de discontinuidad** y los **puntos de corte 0X** y resolvemos. *El signo del resultado será lo que buscamos.*

4. **PERIODICIDAD**

   Una función es periódica si su gráfica se repite cada cierto intervalo de amplitud **P**, si $f(x+P) = f(x)$ *Ocurre en las funciones trigonométricas.*

5. **SIMETRÍA**

   Una función es simétrica si al doblar su gráfica por el eje de simetría, esta se superpone. Existen dos tipos de simetría:

   - Simetría **PAR**: $f(x) = f(-x)$
   - Simetría **IMPAR**: $f(-x) = -f(x)$

6. **ASÍNTOTAS**

   Las asíntotas son líneas a las que se acerca la función sin llegar a tocarlas.

   - **Asíntotas Verticales**: Rectas donde $x = a$

     Se miran en los puntos de discontinuidad.

     $$\lim_{x \to a} f(x)$$

     Si da un valor infinito hay que hacer los limites laterales y averiguar el signo.

     $$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

     $$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

   - **Asíntotas Horizontales**: Rectas donde $y = b$

     Como mucho puede haber 2.

     $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

     $$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

   Si da un valor finito es una asíntota horizontal.

   Si tiene asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

- **Asíntotas Oblicuas:** Rectas donde $y = mx + n$
  Tenemos que hallar **m** y **n**.
  $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$
  $n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$

7. EXTREMOS

Resolvemos $f'(x) = 0$ y el resultado es un posible extremo relativo.
Sustituimos el resultado en la segunda derivada $f^k(x)$ y resolvemos.

Si k es **PAR**:
- Si $f^k(a) < 0 \rightarrow f(x)$ tiene un máximo en **a**.
- Si $f^k(a) > 0 \rightarrow f(x)$ tiene un mínimo en **a**.

Si k es **IMPAR** no hay extremo.

8. MONOTONÍA

Se estudia en los puntos de discontinuidad y en los extremos relativos
- Si $f'(a) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en **a**.
- Si $f'(a) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en **a**.

9. PUNTOS DE INFLEXIÓN

Resolvemos $f''(x) = 0$ y el resultado es un posible punto de inflexión.
Sustituimos el resultado en la tercera derivada, resolvemos y el resultado tiene que ser distinto de **0**. $f^k(x) \neq 0$.

Si k es **PAR**, no podemos decir nada.
Si k es **IMPAR**, el resultado es un punto de inflexión.

10. CURVATURA

Se estudia a los lados de los puntos de inflexión.

- Si $f''(a) > 0 \rightarrow f(x)$ es **cóncava** en **a**.
- Si $f''(a) < 0 \rightarrow f(x)$ es **convexa** en **a**.

11. REPRESENTACIÓN

* Integrales indefinidas:

- Primitiva de una función: (Antiderivada).

$F(x)$ es primitiva de $f(x)$ si, y solo si, $F'(x) = f(x)$

Si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ entonces $F(x)+C$ tambien es primitiva de $f(x)$.

Cuando resolvamos integrales INDEFINIDAS, siempre pondremos el resultado $+C$.

- Integral indefinida: Se llama integral indefinida de una función al conjunto de todas las primitivas de la función.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Propiedades:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int \emptyset\,dx = C$$

$$\int K\,dx = Kx + C$$

1. Integrales inmediatas: El metodo de integración por integrales inmediatas, consiste en transformar la función dada, mediante la tabla de integrales inmediatas.

Ejemplos:

$$\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6} + C$$

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+5}\,dx = Ln|x^3+x+5| + C$$

Como el numerador es la derivada del denominador, aplicamos la formula.

$$\int Cotgx\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = Ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\,dx = e^{\operatorname{sen} x} + C$$

2. Integración por partes:

$$\int \underset{u}{f(x)} \cdot \underset{dv}{g'(x)\,dx} = \underset{u}{f(x)} \cdot \underset{v}{g(x)} - \int \underset{du}{f'(x)} \cdot \underset{v}{g(x)}\,dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Un día vi una vaca menos integrada vestida de uniforme.

Ejemplos:

$\int x \operatorname{sen} x\, dx$ $\quad u = x \rightarrow du = 1dx$

$dv = \operatorname{sen} x \rightarrow v = -\cos x$

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x - \int -\cos x\, dx = \boxed{-x\cos x + \operatorname{sen} x + C}$$

$\int x \operatorname{arctg} x\, dx$ $\quad u = \operatorname{arctg} x \rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}$

$dv = x \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} =$$

$$\frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2} = \boxed{\frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \cdot x + \operatorname{arctg} x + C}$$

$\boxed{\int e^x \operatorname{sen} x} = I$ $\quad u = e^x \rightarrow du = e^x$

$dv = \operatorname{sen} x \rightarrow v = -\cos x$

$\int e^x \operatorname{sen} x = -e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x$ $\quad u = e^x \rightarrow du = e^x$

$du = \cos x \rightarrow v = \operatorname{sen} x$

$-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \boxed{\int \operatorname{sen} x \cdot e^x} = I$ $\quad$ Ahora tenemos que $\int \operatorname{sen} x \cdot e^x = I$ y tenemos una ecuación.

$$I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - I \rightarrow 2I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

$$I = \frac{-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} = \boxed{\frac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2}}$$

3. Integración de funciones racionales:

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ - Si el grado del numerador $P(x)$ es mayor que el grado del denominador $Q(x)$, se divide y obtenemos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \underbrace{C(x)}_{\text{Cociente}} + \frac{R(x) \rightarrow \text{Resto}}{\underbrace{Q(x)}_{\text{Divisor}}}$$

- Factorizamos el denominador y descomponemos en fracciones simples de la siguiente forma:
  - Si obtenemos una raíz real simple "a", se obtiene una fracción $\frac{A}{x-a}$
  - Si obtenemos una raíz real "b" de multiplicidad n, se obtienen n fracciones.

    $$\frac{B}{x-b}, \frac{B}{(x-b)^2}, \ldots, \frac{B}{(x-b)^n}$$
  - Si obtenemos un par de raíces imaginarias conjugadas:

    $$\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$$

Ejemplos:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{Mx+N}{(x+1)^2+2}$$ → Tenemos que encontrar M y N.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot1\cdot3}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}$$

No tiene solución real. Queremos llevar las raíces a un arcotangente.

En este caso $Mx+N$ tiene que valer 1, porque el numerador vale 1.

$Mx = \emptyset \rightarrow \boxed{M=\emptyset}$

$Mx+N = 1 \rightarrow M\cdot\emptyset + N = 1 \rightarrow \boxed{N=1}$

$$\int \frac{Mx+N}{(x+1)^2+2} = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}$$ → como buscamos algo parecido a una integral inmediata:

Como queremos llegar al arcotangente $\frac{1}{1+x^2}$, divido todo entre 2.

$$\int \frac{1/2}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} =$$

$\int \frac{1}{x^2+1} = \text{arctg}\, x + C$, dividimos entre 2

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}\right)+C}$$

$$\int \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx$$

$$\begin{array}{l|l} 12x^3-8x^2+9x-5 & 6x^2-7x+2 \\ \cline{2-2} -12x^3+14x^2-4x & 2x+1 \\ \hline \emptyset \quad +6x^2+5x-5 & \\ \quad -6x^2+7x-2 & \\ \hline \quad \emptyset \quad +12x-7 & \end{array}$$

$$\int 2x+1\,dx + \int \frac{12x-7}{6x^2-7x+2}dx = x^2+x+Ln|6x^2-7x+2|+C$$

$$\int 2x+1\,dx = 2\int x+1 = 2\cdot\frac{x^2}{2}+x = x^2+x$$

$\int \frac{12x-7}{6x^2-7x+2}dx =$ como $\frac{d}{dx}\, 6x^2-7x+2 = 12-7$, integramos con las integrales inmediatas.

$L|6x^2-7x+2|+C$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}dx$$

$$\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2}\begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$$

$= \int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\right)dx =$ Sacamos factor comun

$A(x-2)+B(x-1)$ y esta suma es igual al numerador, así que igualamos.

$A(x-2)+B(x-1) = 2x+1$

$Ax-2A+Bx-B = 2x+1 \rightarrow Ax+Bx-2A-B = 2x+1$

$(A+B)x-2A-B = 2x+1$ El termino que va con las x por un lado y el otro a parte para obtener la ecuación.

$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=1 \end{cases}$ resolvemos $\quad A=2-B$

$-2(2-B)-B=1$

$-4+2B-B=1$

$\boxed{B=1+4=5}$

$A+5=2$

$\boxed{A=2-5=-3}$

$$\int\left(\frac{-3}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)dx = \begin{cases} \int \frac{-3}{x-1}dx = -3\int \frac{1}{x-1}dx = -3Ln|x-1|+C \\ \int \frac{5}{x-2}dx = 5\int \frac{1}{x-2} = 5Ln|x-2|+C \end{cases}$$

$$\int\left(\frac{-3}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)dx = -3Ln|x-1|+5Ln|x-2|+C$$

$\int \frac{4}{x^4-1}dx =$ Obtenemos las raices usando rufini:

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 0 & -1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(x-1) \\
(x+1) \\
(x^2+1)
\end{array}$$

Aqui acabamos

$$\int \frac{4}{x^4-1}dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \right) dx$$

$$A(x^2+1)(x+1) + B(x^2+1)(x-1) + (Cx+D)(x^2-1) = 4$$

$x^4-1 \rightarrow t = x^2$

$t^2 - 1 = \emptyset \rightarrow t^2 = 1 \rightarrow t = \pm\sqrt{1} = \boxed{\pm 1}$ Estos son dos resultados que anulan x^4-1, así que probamos.

$x = 1 \rightarrow A(1^2+1)(1+1) + B(1^2+1)(1-1) + (C+D)(1^2-1) = 4$

$4A + \emptyset + \emptyset = 4 \rightarrow \boxed{A = 1}$

$x = -1 \rightarrow A((-1)^2+1)(-1+1) + B((-1)^2+1)(-1-1) + (-C+D)((-1)^2-1) = 4$

$\emptyset - 4B + \emptyset = 4 \rightarrow \boxed{B = -1}$

Despejamos:

$x^3 + x^2 + x + 1 - x^3 + x^2 - x + 1 + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D = 4$

$2x^2 + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D = 2$

Sustituimos:

$x = \emptyset \rightarrow 0 + 0 - 0 + 0 - D = 2 \rightarrow \boxed{D = -2}$

Despejamos

$2x^2 + Cx^3 - Cx - 2x^2 + 2 = 2$

$Cx^3 - Cx = \emptyset \rightarrow$ Demos el valor que demos a x, el resultado es $C = \emptyset$

$x = 2 \rightarrow 8C - 2C = \emptyset \rightarrow 6C = \emptyset \rightarrow \boxed{C = \frac{\emptyset}{6} = \emptyset}$

$$\int \frac{1}{x-1} + \int \frac{-1}{x+1} + \int \frac{-2}{x^2+1} dx = L|x-1| - L|x+1| - 2\int \frac{1}{x^2+1} =$$

$$\boxed{L|x-1| - L|x+1| - 2\,\mathrm{arctg}\,x + C}$$

Tabla de integrales inmediatas

» **Regla de la potencia:**

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$	$\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$

» **Cocientes:**

$\int \frac{1}{x} dx = Ln\|x\| + C$	$\int \frac{f'}{f} dx = L\|f\| + C$
$\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$, $n \neq 1$	$\int \frac{f'}{f^n} dx = \frac{f^{-n+1}}{-n+1} + C$, $n \neq 1$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$	$\int \frac{f'}{1+f^2} dx = arctgf + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsenx + C$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = arcsenf + C$

» **Exponenciales:**

$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^f \cdot f' dx = e^f + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{La} + C$	$\int a^f \cdot f' dx = \frac{a^f}{La} + C$

» **Trigonométricas**

$\int \cos x dx = senx + C$	$\int \cos f \cdot f' dx = senf + C$
$\int senxdx = -\cos x + C$	$\int senf \cdot f' dx = -\cos f + C$
$\int tgxdx = L\|\sec x\| + C$	$\int tgf \cdot f' dx = L\|\sec f\| + C$
$\int \sec^2 xdx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1+tg^2 x) dx =$ $= tgx + C$	$\int \sec^2 f \cdot f' dx = \int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \int (1+tg^2 f) \cdot f' dx =$ $= tgf + C$
$\int cosec^2 xdx = \int \frac{1}{sen^2 x} dx = \int (1+\cot g^2 x) dx =$ $= -\cot gx + C$	$\int cosec^2 f \cdot f' dx = \int \frac{f'}{sen^2 f} dx = \int (1+\cot g^2 f) \cdot f' dx =$ $= -\cot gf + C$

* Sucesiones y series finitas:

- Sucesión: Cualquier función cuyo dominio es el conjunto de numeros enteros a partir de un cierto n_0.

A cada elemento se le llamará **termino** o **miembro**.

A la regla que da la fórmula para calcular el resto de terminos se le llama termino general.

Una sucesión la podemos escribir como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Diremos que la sucesión es **convergente** si:

$|a_n - L| < \varepsilon$ El termino general de la sucesión y un valor L es menor que ε. Epsilon es un numero todo lo pequeño que queramos.

es decir $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Si L no es un numero finito, la sucesión sera **divergente**.

- Teorema del encaje:

Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones convergentes al mismo numero real L, entonces, si se tiene otra sucesion $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ que $a_n \le C_n \le b_n$ para todo indice n salvo un numero finito, entonces la sucesion $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ tambien converge a L.

Ejemplo: $C_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$ $\quad 2^n < n!$ a partir de $n=4$

$\frac{-1}{2^n} \le (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^n}$ Llegamos a esto.

Sacamos los limites de "a" y "b":

$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2^n} = \emptyset$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \emptyset$

Por lo tanto, segun el teorema del encaje, el $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} = \emptyset$ y como es un valor finito, es convergente a $\emptyset$.

Teorema del valor absoluto:

$\lim_{n \to \infty} |a_n| = \emptyset$ entonces $\lim_{n \to \infty} a_n = \emptyset$

Monotonia:

Una sucesión creciente o decreciente se dice que es monotona.
Si sus terminos son crecientes la llamamos monotona creciente.
Si sus terminos son decrecientes la llamamos monotona decreciente.
Una sucesión es acotada si existe un numero real positivo tal que $|a_n| \leq M$
Toda sucesión monotona y acotada es convergente.

Ejemplo:

$a_n = \frac{2n}{1+n}$

Buscamos la cota:

$\left|\frac{2n}{1+n}\right| \leq \frac{2n}{1+n} \leq \frac{2n}{n}$ si hacemos la operación de este ultimo:

$\frac{2n}{n} = \boxed{2}$ cota superior de la sucesión.

Monotonia: para hallarla realizamos el cociente entre dos números consecutivos y tiene que ser mayor que 1.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2(n+1)}{1+(n+1)}}{\frac{2n}{1+n}} = \frac{2n+2}{2+n} : \frac{2n}{1+n} = \frac{(2n+2)(1+n)}{(2+n)\cdot 2n} = \frac{2n^2+2n+2n+2}{2n^2+4n} =$$

$$\frac{2n^2+4n+2}{2n^2+4n} = \frac{2(n^2+2n+1)}{2(n^2+2n)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$$

Nuestra sucesion es monotona creciente y acotada por el 2, por lo tanto es convergente.

Series: Dada una sucesión, la soma n-ésima sera la suma de sos n primeros terminos.
Las representamos como S_n.
Definimos serie como la suma infinita de los terminos de una sucesión.
Diremos que una serie es convergente si:
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$ siendo siempre un numero real.

Series geométricas:
$\sum_{n\geq 1} a \cdot r^n$
Converge si $|r|<1$ $\sum_{n\geq 1} a\cdot r^n$ converge a $\frac{a}{1-r}$
Diverge si $|r|\geq 1$

Ejemplos:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$ por lo tanto: $a=3$ $r=\frac{1}{2}$ $r<1$
es convergente hacia $\frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = \boxed{6}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$ $a=1$ $r=\frac{3}{2}$ $r>\emptyset$
es divergente.
Una serie divergente implica que su soma es infinita.

Criterio del termino general:
Si una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{k\to+\infty} a_k = \emptyset$
si no converge a $\emptyset$ es divergente. Termino general.
No confundir termino general con suma parcial.
Propiedades de las series:
Si $\sum a_n$ converge y su suma es A y si
$\sum b_n$ converge y su suma es B, entonces:
$\sum c a_n$ converge y su suma vale $c\cdot A$

$\sum(a_n+b_n) = A+B$
$\sum(a_n-b_n) = A-B$

Criterio de comparación:

Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ son series de terminos positivos, verificando

$a_n \leq b_n$, $\forall n$ entonces:

Si $\sum_{n\geq 1} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.

Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ es divergente, entonces $\sum_{n\geq 1} b_n$ es divergente.

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$$

$$a_n = \frac{1}{2+3^n} \leq \frac{1}{3^n} = b_n \qquad \frac{1}{3^n} = 1 \cdot \frac{1}{3^n} \quad a=1 \quad r=\frac{1}{3} \quad r<1 \text{ converge}$$

por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$ es convergente.

Criterio de comparación asintótica:

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ (L = finito y $L \neq \emptyset$), entonces

$$\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge} \longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge}$$

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n + 5}{4n^3 + 3n}$ lo "simplificamos" $\frac{2^n}{n^2}$ es divergente.

Buscamos el limite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n \cdot 2^n + 5}{4n^3 + 3n}}{\frac{2^n}{n^2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n \cdot 2^n + 5)\, n^2}{(4n^3 + 3n)\, 2^n} = \frac{2^n \left(n + \frac{5}{2^n}\right) n^2}{2^n (4n^3 + 3n)} = \frac{n^2 \left(n + \frac{5}{2^n}\right)}{n^2 \left(4n + \frac{3}{n}\right)} =$$

$$\frac{n + \frac{5}{2^n}}{4n + \frac{3}{n}} = \frac{n\left(1 + \frac{5}{n2^n}\right)}{n\left(4 + \frac{3}{n^2}\right)} = \frac{1 + \frac{5}{n2^n}}{4 + \frac{3}{n^2}} = \frac{1+\emptyset}{4+\emptyset} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Es una serie divergente porque el limite es finito y distinto de $\emptyset$.

Convergencia absoluta:

Si la serie $\sum |a_n|$ converge, la serie $\sum a_n$ converge.

Si la serie $\sum |a_n|$ converge, la serie $\sum a_n$ se dice absolutamente convergente.

Criterio del cociente: (D'Alembert)

Sea $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ cociente entre dos numeros consecutivos

- Si $L < 1$, $\sum_{n\geq 1} a_n$ Converge
- Si $L > 1$, $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge

Si $L = 1$ no podemos decir nada con este método.

Ejemplos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} = \frac{2^{n+1}\cdot n!}{2^n\cdot(n+1)!} = \frac{2^n\cdot 2^1\cdot n!}{2^n(n+1)!} =$$

$$\frac{2\cdot n!}{(n+1)!} = \frac{2\cdot n!}{(n+1)\cdot n!} = \frac{2}{n+1} = \frac{2}{\infty} = \emptyset < 1 \text{ convergente.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot n^2}{2^n\cdot(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot 2^1\cdot n^2}{2^n\cdot(n+1)^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} = \frac{2n^2}{n^2+2n+1} \text{ Aplicamos leibtniz} = \frac{2}{1} = \boxed{2} > 1$$

Es divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \qquad \lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n} = \frac{(n+1)^n\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot n^n} =$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^n}$$

Criterio de la raíz: (Cauchy)

Sea $L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ entonces:

- Si $L < 1$ $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge
- Si $L > 1$ $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge

Si $L = 1$ no podemos hacer nada con este método.

Ejemplos:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$ $\quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}} = \frac{e^2}{n} = \emptyset < 1$ convergente

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n}{(n+1)^n}$ $\quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n-1)^n}{(n+1)^n}} = \frac{2n-1}{n+1}$ usamos leibtniz $= \frac{2}{1} = \boxed{2}$

$2 > 1 \to$ divergente.

SERIE	CONVERGE	DIVERGE
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\lim_{n \to \infty} a^n \neq 0$
$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^n$	$\|r\| < 1$	$\|r\| \geq 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1$	$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} > 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\lim_{n \to \infty} \left\|\frac{a_n + 1}{a_n}\right\| < 1$	$\lim_{n \to \infty} \left\|\frac{a_n + 1}{a_n}\right\| > 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$0 \leq a_n \leq b_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$	$0 \leq b_n \leq a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

*Cálculo de raíces:

Los valores se llamarán:

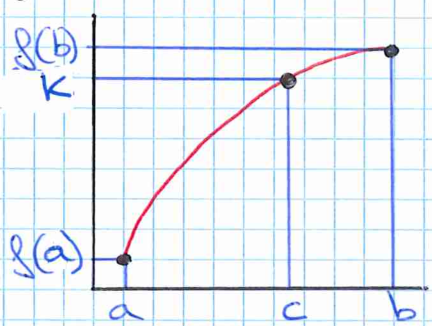
- Cero de $f(x)$
- Raíz de $f(x)=\emptyset$

Se soluciona en dos etápas:

- Separar las raíces: buscar un intervalo "pequeño" de la función que contenga una sola raíz.
- Aproximar el valor con la tolerancia deseada.

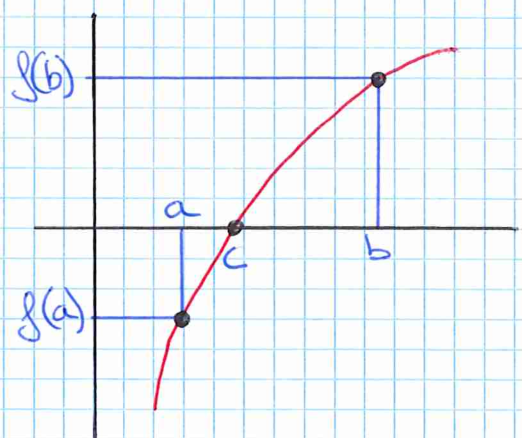
-Teorema del valor intermedio:

Si f pertenece a $C[a,b]$ y K es un número cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe c en (a,b) tal que $f(c)=K$.



-Corolario:

Si f pertenece $C[a,b]$ y asume valores de signo opuesto en los extremos de un intervalo $[a,b]$, es decir, $f(a)\cdot f(b)<\emptyset$, entonces, el intervalo contendrá al menos una raíz de la ecuación $f(x)=\emptyset$, es decir, habrá al menos un número c perteneciente al intervalo (a,b) tal que $f(c)=\emptyset$.

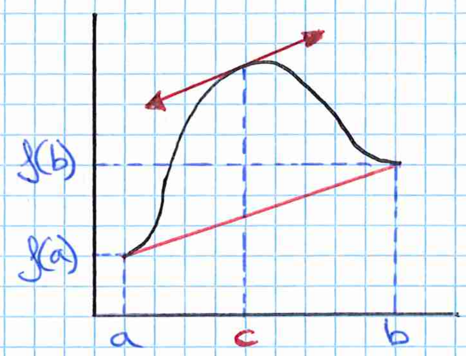


- Teorema del valor medio:

Si f pertenece a $C[a,b]$ y f es derivable en (a,b), entonces existe un número c tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$, esto significa:

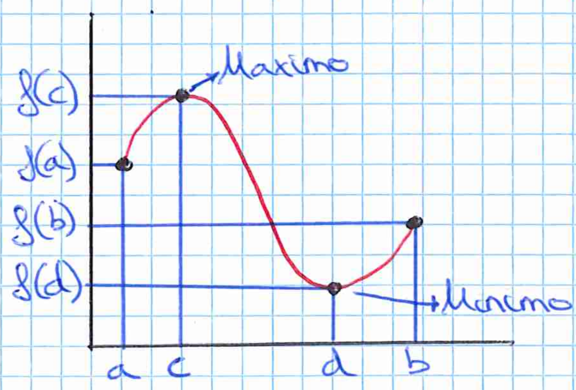
La derivada de la función en este punto es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



- Teorema del valor extremo:

Si f pertenece a $C[a,b]$, entonces existen (c,d) que pertenecen $[a,b]$ tales que $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$ para todo x perteneciente $[a,b]$.

Si además, f es derivable en (a,b), entonces los números c y d existirán en los extremos de $[a,b]$ o donde $f' = \phi$.



- Algoritmo de bisección, busqueda binaria o Bolzano:

Supongamos que tenemos una función continua f definida en el intervalo $[a,b]$, con $f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos. Entonces por el corolario del teorema del valor intermedio, existe c perteneciente a (a,b) tal que $f(c)=\emptyset$.

- Como calcularlo:
  - Dividimos a la mitad el intervalo.
  - Localizamos la mitad que contiene a p. → raiz que buscamos.
  - Sea $a_1=a$ y $b_1=b$:
  - Definimos $p_1=(a_1+b_1)/2$ (punto medio)
  - Si $f(p_1)=\emptyset$ parar porque lo hemos encontrado.
  - Si $f(p_1)$ mismo signo que $f(a_1) \to p\in(p_1,b_1)$ entonces tomamos $a_2=p_1$ y $b_2=b_1$.
  - Si $f(p_1)$ mismo signo que $f(b_1) \to p\in(a_1,p_1)$ entonces tomamos $a_2=a_1$ y $b_2=p_1$.
  - Repetimos el proceso con (a_2,b_2).
  - Repetimos hasta una determinada tolerancia.

Usaremos la tolerancia: $\dfrac{|p_n-p_{n-1}|}{|p_n|}<\varepsilon$

Ejemplo: La función $f(x)=x^3+4x^2-10$ tiene una raiz en $[1,2]$. Calcula la aproximación a la raiz con una tolerancia 10^{-4}.

1- Comprobamos que es continua.

2- Sacamos los valores en a y b:

$f(1)=-5$ $\quad$ $f(2)=14$

Como son de signos opuestos, tenemos un c donde $f(c)=\emptyset$

3- Construimos una tabla con:
- Nº de iteración
- a_n extremo izquierdo
- b_n extremo derecho.
- p_n aproximación
- $f(p_n)$ valor de f en la aproximación
- Tolerancia.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$\frac{\lvert p_n - p_{n-1} \rvert}{\lvert p_n \rvert}$
1	1	2	1'5	2'375	—
2	1	1'5	1'25	-1'7968	0'2
3	1'25	1'5	1'375	0'1621	$0'0\overset{\frown}{9}$
4	1'25	1'375	1'3125	-0'8483	0'0476
5	1'3125	1'375	1'34375	-0'3509	0'02325
6	1'34375	1'375	1'359375	-0'0964	0'01149
7	1'359375	1'375	1'367185	0'03215	0'005
8	.....	....	....	.....	....
n					0'0000...

Despues de 13 iteraciones obtenemos

$p = 1,36511230 5$ con tolerancia menor que 10^{-4}

* Ejercicios algoritmo de bisección, busqueda binaria o Bolzano:

- La función $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$ tiene cuatro raíces. Calcular mediante el método de bisección, la aproximación a la raiz contenida en el intervalo $(2,3)$ con una precisión relativa $< 3 \cdot 10^{-2}$

$3 \cdot 10^{-2} = 0'03$ de tolerancia.

$f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 4 = 16 - 16 - 16 + 8 + 4 = \boxed{-4}$

$f(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 4 = 81 - 54 - 36 + 12 + 4 = \boxed{7}$

Como $f(a) \cdot f(b) < \emptyset$ se cumple el corolario del teorema del valor medio, entonces podemos usar el algoritmo de bisección.

n	a	b	p	f(p)	$\frac{\lvert P_n - P_{n-1} \rvert}{P_n}$
1	2	3	2'5	-3,1875	—
2	2'5	3	2'75	0,3476	$0'0\overline{9}$
3	2'5	2'75	2'625	-1'757568	0'0476
4	2'625	2'75	2'6875	-0'795639	0'0232

Nuestra aproximacion a la raiz es 2'6875 con una tolerancia $< 3 \cdot 10^{-2}$

- La función $f(x)=x^4-2x^3-4x^2+4x+4$ tiene cuatro raíces. Calcular mediante el método de bisección, la aproximación a la raíz contenida en el intervalo $(1,2)$ con una precisión relativa $< 3\cdot 10^{-2}$

$3\cdot 10^{-2} = 0'03$

$f(1) = 1-2-4+4+4 = \boxed{3}$

$f(2) = 2^4-2\cdot 2^3-4\cdot 2^2+4\cdot 2+4 = 16-16-16+8+4 = \boxed{-4}$

Como $f(a)\cdot f(b) < \emptyset$ se cumple el corolario del teorema del valor medio y podremos usar el algoritmo de bisección.

n	a	b	p	f(p)	$\frac{\lvert P_n - P_{n-1}\rvert}{\lvert P_n\rvert}$
1	1	2	1'5	-0'6875	—
2	1	1'5	1'25	1'285156	0'2
3	1'25	1'5	1'375	0'312744	$0'0\widehat{9}$
4	1'375	1'5	1'4375	-0'1865	0'043478
5	1'375	1'4375	1'40625	0'0636	$0'0\widehat{2}$

Nuestra aproximación a la raíz es 1'40625 con una tolerancia $< 3\cdot 10^{-3}$.

* Algoritmo del punto fijo:

A una solución de la ecuación $g(x)=x$ se le llama punto fijo de la función g.

Si $g(x)$ es de la forma $g(x)=x-f(x)$, los puntos fijos de g son raíces de f.

Iteración punto fijo:

- Escogemos aproximación principal p_0.
- Generamos la sucesión $\{p_n\}$ tomando $p_n=g(p_{n-1})$
- Si la sucesión converge a p y g es continua:
  - p es punto fijo de g → p es raíz de f.

Ejemplo: $f(x)=x^3+4x^2-10$ entre $(1,2)$ aceptación $5\cdot10^{-3}$

Despejamos una x:

$$4x^2=10-x^3 \rightarrow x^2=\frac{10-x^3}{4} \rightarrow \boxed{x=\sqrt{\frac{10-x^3}{4}}}=g(x)$$

Cogemos el punto intermedio y sustituimos:

$p_1=g(1,5)=1,286953768$

volvemos a sustituir

$p_2=g(1,28)=1,402540804$

$p_3=g(1,40)=1'345458374$

$p_4=g(1,34)=1'375170253$

$p_5=g(1,37)=1'360094119$ nivel de aceptación 0'11

$\boxed{p_6=g(1,36)=1'367846968}$ nivel de aceptación 0'005

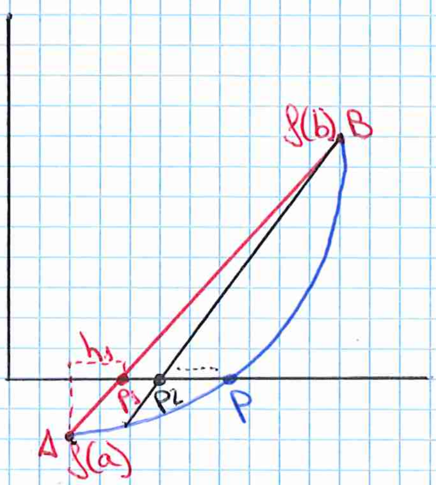
*Método de la secante:

- Aplicar el método de bisección.
- En lugar de dividir por la mitad del intervalo $[a,b]$ dividimos en relación $-f(a):f(b)$
- Valor aproximado de la raíz: $p_1 = a + h_1 = b - \tilde{h}_1$

$$h_1 = \frac{f(a)}{-f(a)+f(b)}(b-a) \qquad \tilde{h}_1 = \frac{f(b)}{-f(a)+f(b)}(b-a)$$

Geometricamente:

- Sustituir la curva $y=f(x)$ por una cuerda que pase por los puntos $A[a,f(a)]$ y $B[b,f(b)]$.



- Hay dos casos diferentes:
  - $f(a)>\emptyset$, el extremo a esta fijo.

Entonces $p_0 = b$ y la formula sera la $\tilde{h}_1$.

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{-f(a)+f(p_n)} \cdot (p_n - a)$$

- $f(a)<\emptyset$, el extremo b esta fijo.

Entonces $p_0 = a$ y la formula sera la h_1.

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{-f(p_n)+f(b)} \cdot (b - p_n)$$

Tolerancia: $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon$

Ejemplo: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ Tolerancia $4 \cdot 10^{-4}$

$\text{Tolerancia} = \frac{4}{10^4} = 0'0004$

Entre los puntos:

$$\left.\begin{array}{ll} f(1,3) = -1,043 < \emptyset & a \\ f(1,4) = 0'584 > \emptyset & b \end{array}\right\} f(a) < \emptyset$$

$$p_0 = a, \quad p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{-f(p_n) + f(b)} (b - p_n)$$

$p_0 = 1,3$

$$p_1 = 1,3 - \frac{f(1,3)}{-f(1,3) + f(1,4)} \cdot (1,4 - 1'3) = 1'3 - \frac{-1,043}{1'043 + 0'584} \cdot (0'1) = 1'364105716$$

$$p_2 = 1'3641 - \frac{f(1,36)}{-f(1'36) + f(1,4)} \cdot (1,4 - 1'36) = 1'365211083$$

$$p_3 = 1'3652 - \frac{f(1,3652)}{-f(1'3652) + f(1'4)} \cdot (1'4 - 1'3652) = 1'365229695$$

$$\boxed{\frac{p_3 - p_2}{p_3} = 0'0000136}$$

1'365229695 es nuestra raíz con un valor relativo de $136 \cdot 10^{-7}$

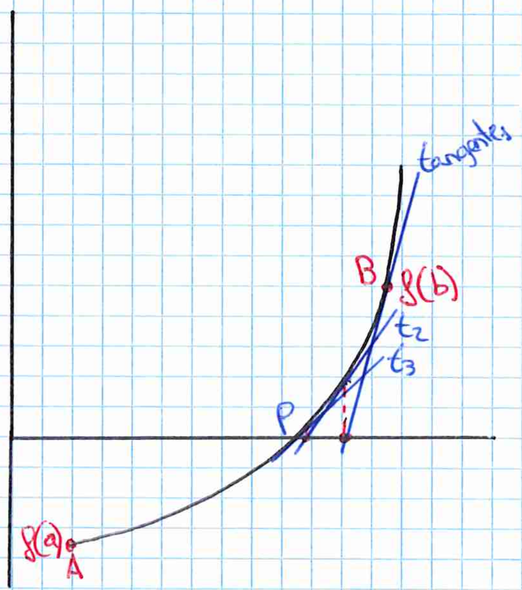
*Metodo de Newton - Raphson o Tangente:

- Implica generar la sucesion:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

- Obliga a calcular la derivada de $f(x)$
- Una unica aproximación inicial es suficiente para iterar.

- Geometricamente:
  - Sustituir un arco pequeño de la curva $y=f(x)$ por una tangente trazada por un punto de la curva.



- Lanzo una tangente en $p_0 = f(b)$ y donde corta al eje x subo a la función y asi hasta que llegamos a p que es la solución.

- Definición:
  - Es un método muy local y se necesita una buena aproximación inicial.
  - Una buena aproximación cumple $f(p_0)\cdot f''(p_0) > \emptyset$
  - Obliga a calcular la segunda derivada y evaluarla.
  - No usar el método si $f(x)$ es casi horizontal.

- Tolerancia:

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \varepsilon$$

- Ejemplo:

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

Raiz en el intervalo $(1, 2)$

Aproximacion inicial $1{,}5$

Tolerancia $10^{-4} = 0'0001$

$f(1) = -5$

$f(2) = 14$

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

$f'(x) = 3x^2 + 8x$

$p_0 = 1'5 \quad f(1{,}5) = 2'375 > 0$

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 4p_{n-1}^2 - 10}{3p_{n-1}^2 + 8p_{n-1}}$$

$$p_1 = 1'5 - \frac{1'5^3 + 4 \cdot 1'5^3 - 10}{3 \cdot 1'5^2 + 8 \cdot 1'5} = 1'37\overline{33}$$

$$\frac{|1'37 - 1'5|}{|1'373|} = 0'092233$$

$$p_2 = 1'373 - \frac{1'373^3 + 4 \cdot 1'373^3 - 10}{3 \cdot 1'373^2 + 8 \cdot 1'373} = 1'365262015$$

Tolerancia $= 0'005911$

$p_3 = 1'365230014$

Tolerancia $= 0'000023$

*Metodo de la Secante Modificado:

Es una variación del metodo Newton-Raphson.

$$P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f(P_{n-1}) - f(P_{n-2})} \cdot (P_{n-1} - P_{n-2})$$

*Metodo de Newton Modificado:

Newton-Raphson: $P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_{n-1})}$

Sustituimos $f'(P_{n-1}) = f'(P_0)$ y nos quedaria:

$$P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_0)}$$

- Geometricamente:

Sustituimos las tangentes por lineas paralelas a las tangentes.

Ahorramos el calculo de la derivada en cada iteración.

- Tolerancia:

$$\frac{|P_n - P_{n-1}|}{|P_n|}$$

*Metodo de Newton Generalizado:

$$g(x) = x - \frac{f(x) \cdot f'(x)}{(f'(x))^2 - f(x) \cdot f''(x)}$$

Ejemplo: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

$f''(x) = 6x - 10$

Empezamos desde el intervalo $P_0 = 2$

$P_0 = 2'5$

$$P_1 = 2 - \frac{3 \cdot (-6)}{36 - 3 \cdot 2} = 2 - \frac{-18}{30} = 2'789473684$$

$P_2 = 2{,}993836672$

$P_3 = 2{,}999995237$

$P_4 = 2{,}999999998$

$\boxed{P_5 = 3}$

* Técnicas de aceleración:

- Δ^2 de Aitken:

· Acelera una convergencia lineal independientemente de su origen.

$$\hat{P}_n = P_n - \frac{(P_{n+1} - P_n)^2}{P_{n+2} - 2P_{n+1} + P_n}$$

· Para conseguir $\hat{P}_n$ se necesitan 3 iteraciones, que se pueden obtener con cualquier método (bisección, punto fijo, etc.).

· La técnica Δ^2 de Aitken puede utilizarse con cualquier método.

· $\hat{P}_n$ converge mas rápido que P_n.

· Diferencia progresiva:

$\Delta p_n = P_{n+1} - P_n$ para $n \geq \emptyset$

$\Delta^k P_n = \Delta^{k-1}(\Delta p_n)$ para $k \geq 2$

Ejemplo: $f(x) = x^2 - \cos(x)$ con $P_0 = 1$

$g(x) = \sqrt{\cos(x)}$

Con la calculadora en radianes empezamos a iterar:

$f(P_1) = 0'735052871$

$f(P_2) = 0'8612755007$

$$\hat{P}_0 = P_0 - \frac{(P_1 - P_0)^2}{P_2 - 2P_1 + P_0} = 0'8205458675$$

$$\hat{P}_1 = P_1 - \frac{(P_2 - P_1)^2}{P_3 - 2P_2 + P_1} = 0'8233876306$$

$$\hat{P}_2 = P_2 - \frac{(P_3 - P_1)^2}{P_4 - 2P_3 + P_2} = 0'8232022884$$

Con 10 iteraciones tendriamos el resultado frente a 25 del punto fijo.

- Steffersen:

- Aplicando el método Δ^2 de Aitken a la iteración del punto fijo, solo se puede aplicar con esta iteración.
- Aceleramos de convergencia lineal a cuadrática.
- No se aplica no se aplica directamente Δ^2 de Aitken.
- Mismos primeros cuatro terminos: P_0, P_1, P_2 y $\hat{P}_0$

Suponemos $\hat{P}_0$ mejor aproximación que P_2

- Se aplica el punto fijo a $\hat{P}_0$ en vez de P_2.
- Cada tercer termino es generado usando la técnica Δ^2 de Aitken, para los demas se usa el punto fijo en el término anterior.

$$P_0,\ P_1 = g(P_0),\ P_2 = g(P_1),\ \longrightarrow \hat{P}_0 = \{\Delta^2\} P_0$$

$$P_3 = \hat{P}_0,\ P_4 = g(P_3),\ P_2 = g(P_4),\ \longrightarrow \hat{P}_1 = \{\Delta^2\} P_3$$

- Ejemplo $f(x) = x^2 - \cos(x)$ $P_0 = 1$

$g(x) = \sqrt{\cos(x)}$

$P_0^{(0)} = 1$ $P_1^{(0)} = 0'7350525871$ $P_2^{(0)} = 0'8612755007$

$P_3^{(1)} = 0'8205458675$ $P_4^{(1)} = 0'8257251134$ $P_5^{(1)} = 0'8234722135$

$P_6^{(2)} = 0'8241310227$ $P_7^{(2)} = 0'8241328866$ $P_8^{(2)} = 0'8241320566$

$P_9^{(3)} = 0'8241323123$ Asi sucesivamente